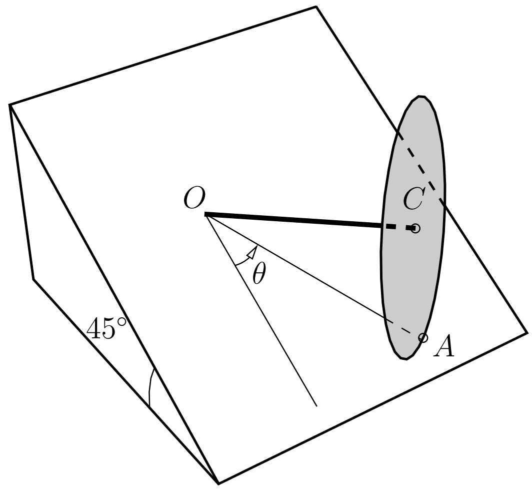
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (2 de diciembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

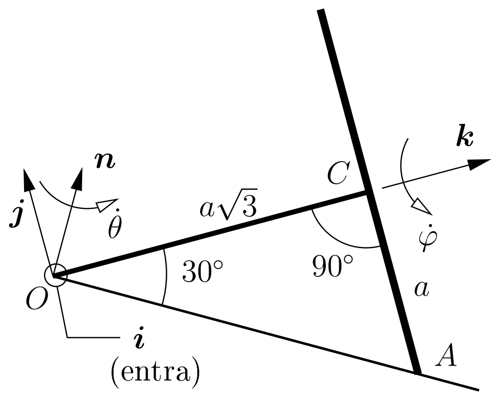
Un disco pesado, homogéneo de masa $2m$ y radio a, tiene unida en su centro rígida y perpendicularmente una varilla OC de masa m y longitud $a\sqrt{3}$ (véase la figura). El sólido descrito rueda sin deslizar sobre un plano inclinado 45º respecto al horizontal, manteniéndose el punto O fijo, de forma que el borde del disco no se separa del plano.



Se pide:

1. Determinar el tensor de inercia del sólido en O.
2. En función del ángulo θ que forma la proyección de la varilla sobre el plano con su dirección de máxima pendiente, obtener la expresión del momento cinético en O en un instante genérico.
3. Ecuación de Lagrange correspondiente a θ.
4. Si inicialmente $\theta_0 = 0$, determinar la mínima velocidad angular $\dot{\theta}_0$ que hace que el sólido dé vueltas completas alrededor de O.

1.— Sea $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base ortonormal a derechas móvil tal que $\boldsymbol{k}$ tiene la dirección de la varilla $\overrightarrow{OC}$ e $\boldsymbol{i}$ es paralelo al plano inclinado. El tensor de inercia en esta base tiene las componentes



$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

siendo

$$A = \underbrace{\frac{1}{3}m(a\sqrt{3})^2}_{\text{varilla}} + \underbrace{\frac{1}{4}2ma^2 + 2m(a\sqrt{3})^2}_{\text{disco (Steiner)}} = \frac{15}{2}ma^2\,,$$

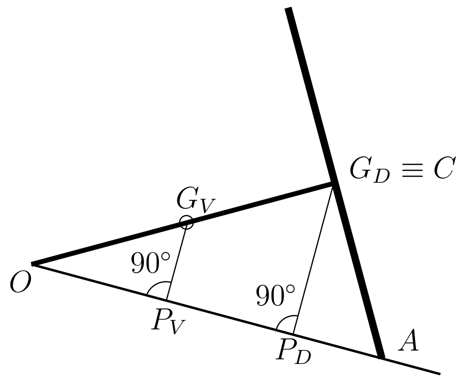
$$C = \underbrace{\frac{1}{2}2ma^2}_{\text{disco}} = ma^2\,.$$

2.— La velocidad angular se puede expresar como $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{n} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{n}$ el versor normal al plano inclinado. El punto O es fijo, y para que el disco ruede sin deslizar es necesario que $\dot{\theta} + \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,30^\circ = 0$, y por tanto $\dot{\varphi} = -2\dot{\theta}$. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{n} = \cos 30^\circ\,\boldsymbol{j} + \mathrm{sen}\,30^\circ\,\boldsymbol{k}$, la velocidad angular y el momento cinético en O resultan

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{j} - \frac{3}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = A\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{j} - C\frac{3}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{k}.$$

3.— La energía cinética se puede obtener como

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}C\left(\frac{3}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{63}{16}ma^2\dot{\theta}^2 .$$

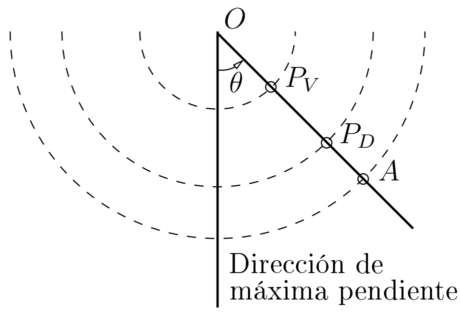


Sea G_V el centro de masas de la varilla y G_D el del disco. Denotemos a sus proyecciones ortogonales al plano de rodadura P_V y P_D, respectivamente. Observamos que las componentes verticales de $\overrightarrow{P_V G_V}$ y $\overrightarrow{P_D G_D}$ son invariantes durante el movimiento. Por tanto, su efecto resulta un término constante que podemos eliminar de la energía potencial, tomando

$$V = mgz_{P_V} + 2mgz_{P_D} ,$$

siendo z_{P_V} y z_{P_D} las alturas de P_V y P_D respecto a O. Resulta

$$\begin{aligned} V &= -mg\overline{OP_V}\cos\theta \operatorname{sen} 45^{\text{o}} - 2mg\overline{OP_D}\cos\theta \operatorname{sen} 45^{\text{o}} \\ &= -\frac{15\sqrt{2}}{8}mga\cos\theta, \end{aligned}$$



obteniéndose la Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{63}{16}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{15\sqrt{2}}{8}mga\cos\theta .$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{63}{8}ma^2\ddot{\theta} + \frac{15\sqrt{2}}{8}mga\operatorname{sen}\theta = 0.$$

4.— La energía total del sistema, cinética más potencial, es constante,

$$E = \frac{63}{16}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{15\sqrt{2}}{8}mga\cos\theta .$$

La velocidad crítica $\dot{\theta}_0$ es aquella para la que se anula la velocidad en el instante en el que el sólido pasa a tener su centro de gravedad más elevado (energía potencial máxima), correspondiente a $\theta = 180^{\text{o}}$. Por tanto,

$$E = \frac{63}{16}ma^2\dot{\theta}_0^2 - \frac{15\sqrt{2}}{8}mga\cos 0^{\text{o}} = -\frac{15\sqrt{2}}{8}mga\cos 180^{\text{o}},$$

resultando

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{21}\frac{g}{a}}.$$