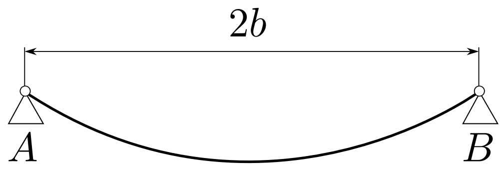
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (2 de diciembre de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Sea un cable homogéneo, inextensible y flexible de peso unitario q anclado en los apoyos A y B con una luz entre apoyos de valor $2b$ tal como indica la figura adjunta. Se sabe que el máximo valor admisible de la tensión en el cable vale $T_{\text{adm}} = \lambda q$, donde λ es un valor dado.



Se pide:

1. Obtener el valor de b en función de λ y del parámetro a de la catenaria para que la máxima tensión en el cable sea igual a la tensión admisible.
2. De las posibles configuraciones del cable que cumplen con el apartado anterior obtener aquella que hace máxima la luz entre apoyos, utilizando $\lambda = 10$ m.
   Nota: como ayuda para resolver la ecuación no lineal que resulta, se da el dato de que la configuración del cable buscada para la máxima luz corresponde a un parámetro "a" de la catenaria entre 5 y 6 m.

1.— El cable forma una catenaria, de ecuación $z = a\cosh\frac{x}{a}$. La tensión en cada punto del cable es $T = qz = qa\cosh\frac{x}{a}$, siendo el máximo para los extremos $x = \pm b$:

$$T_{\max} = qa\cosh\frac{b}{a}\,. \tag{1}$$

Igualando a la tensión admisible, se puede despejar el valor de la semiluz b pedida:

$$T_{\text{adm}} = \lambda q = qa\cosh\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a\,\operatorname{argcosh}\frac{\lambda}{a}\,. \tag{2}$$

2.— El valor máximo de la luz se obtiene derivando la expresión de b en (2) e igualando a cero:

$$0 = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} = \operatorname{argcosh}\frac{\lambda}{a} + a\frac{(-\lambda/a^2)}{\sqrt{(\lambda/a)^2 - 1}} = \operatorname{argcosh}\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{\sqrt{1-(a/\lambda)^2}}. \tag{3}$$

La solución pedida es el valor de a que resuelve esta ecuación trascendente. Esta solución no puede obtenerse de forma explícita, debiendo resolverse mediante iteraciones numéricas. Aplicaremos el método iterativo de Newton, linealizando la ecuación para cada incremento de la iteración. En primer lugar hacemos un sencillo cambio de variable para simplificar las expresiones en (3) a $v = a/\lambda$, de forma que la ecuación a resolver queda

$$f(v) = \operatorname{argcosh}\frac{1}{v} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,. \tag{4}$$

El algoritmo iterativo, partiendo de un valor v_n, permite obtener v_{n+1} como

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \quad \text{con} \quad f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = -\frac{1/v}{(1-v^2)^{3/2}}\,. \tag{5}$$

Partiendo del valor $v_0 = 5/10 = 0{,}5$, las iteraciones numéricas resultantes de aplicar (5) son

n	$f(v_n)$	v_{n+1}
0	0,1622	0,55269
1	$-0{,}0008$	0,55243
2	$-6 \cdot 10^{-8}$	0,55243

La solución es por tanto $a = 0{,}55243\,\lambda = 5{,}5243$ m, bastando con dos iteraciones para su obtención. Sustituyendo en (2) resulta la semiluz máxima del cable

$$b = a\,\mathrm{argcosh}\,\frac{\lambda}{a} = 6{,}6274\,\mathrm{m}\,. \tag{6}$$

La flecha del cable en esta configuración es

$$f = a\cosh\frac{b}{a} - a = 4{,}4756\,\mathrm{m}\,. \tag{7}$$

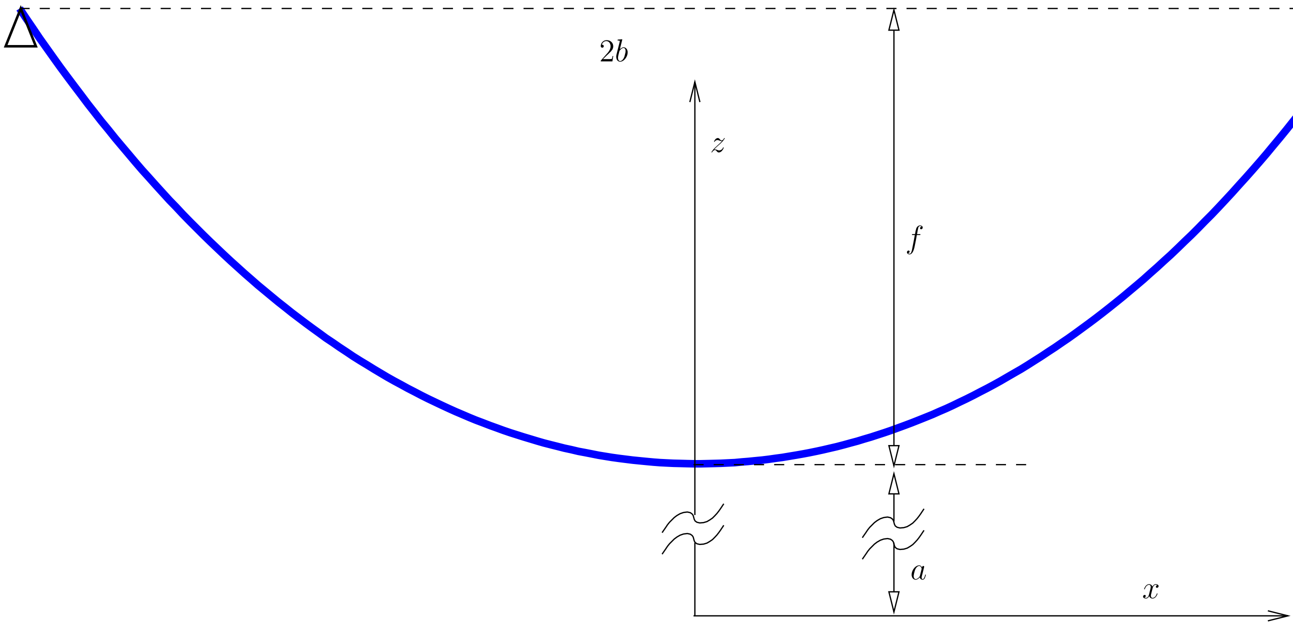


Figura 1: Dibujo con proporciones reales de la catenaria obtenida