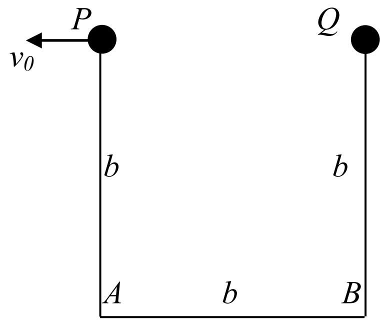
2º PARCIAL 9/3/12 EJERCICIO 3º



Dos partículas P y Q, de masa m cada una, se mueven sobre un plano horizontal, fijo y liso.

Están unidas por un hilo inextensible de longitud $3b$, que pasa alrededor de dos clavos A y B, fijos y lisos, que distan b.

Estando el sistema en reposo, en la posición de la figura ($PA = BQ = b$, siendo rectos los ángulos PAB y ABQ) se imprime a P una velocidad v_0 perpendicular a PA.

Se pide:

1º.- Encontrar el número n de grados de libertad del sistema y escoger unos parámetros adecuados para representarlos.
2º.- Razonar la existencia de integrales primeras, expresándolas.
3º.- Demostrar que, con independencia del valor de v_0, la partícula Q llega a B antes de que el hilo se separe de algún clavo.

1º.-El sistema tiene 3 g.d.l.: cada partícula, al estar ligada a un plano, tendría 2 g.d.l., pero existe el vínculo interno del hilo inextensible que las une, por lo que quedan 3.

Los parámetros más adecuados son:
r = distancia de P a A
θ = ángulo que gira el ramal AP
φ = ángulo que gira el ramal BQ
Nota: la distancia BQ viene determinada por $2b - r$

2º.- La partícula Q está sometida (además de a su peso y la reacción del plano, que se compensan) a la tensión del hilo, que pasa por B, por lo que se conservará su momento cinético respecto de B (es decir, será constante su velocidad areolar):

$$(2b-r)^2\,\dot{\varphi} = cte = 0 \qquad [\mathrm{I}]$$

Por el mismo razonamiento, se conservará el momento cinético de P respecto de A:

$$r^2\dot{\theta} = cte = bv_0 \qquad [\mathrm{II}]$$

La tercera integral primera sale de la conservación de la energía del sistema global.

$$\tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = cte = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \qquad [\mathrm{III}]$$

3º.- La ecuación [I] nos dice que φ = cte = 0, es decir, la partícula Q recorrerá la recta QB.

Despejamos $\dot{\theta}$ de [II] y sustituimos en [III], obteniendo:

$$\frac{\sqrt{2}\,r\dot{r}}{v_0\sqrt{r^2-b^2}} = 1$$

que se integra inmediatamente: $r^2 - b^2 = \tfrac{1}{2}\, v_0^2 t^2$ [IV]

Cuando Q llegue a B, $r = 2b$, lo que ocurrirá en el instante $t_1 = \sqrt{6}\,b / v_0$.

De [IV] sacamos r^2 que sustituimos en [II], resultando:

$$\dot{\theta} = \frac{bv_0}{b^2 + \tfrac{1}{2}v_0^2t^2} = \frac{\sqrt{2}\,\dfrac{v_0}{b\sqrt{2}}}{1+\left(\dfrac{v_0}{b\sqrt{2}}t\right)^2}$$

que se integra inmediatamente: $\theta = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{v_0}{b\sqrt{2}}t\right)$

En el instante t_1: $\theta_1 = \sqrt{2}\,\pi/3 < \pi/2$ luego el hilo aún no se ha separado del clavo.