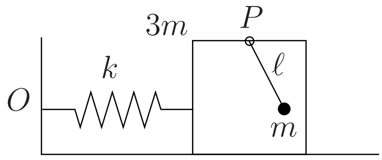
Mecánica – ICCP

EXAMEN PARCIAL (31 de mayo del 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un péndulo simple, constituido por una masa m que cuelga de un hilo sin masa de longitud ℓ, está suspendido de un punto P de una caja hueca de masa $3m$. La caja, a su vez, está unida a un punto fijo O a través de un resorte de constante k, y se mueve en todo momento sobre una recta horizontal fija y lisa.



Se pide:

1. Identificar los grados de libertad del sistema y obtener la expresión de la Lagrangiana.
2. Ecuaciones de la dinámica para pequeños movimientos respecto a la posición de equilibrio estable. Expresión de las matrices de masa y de rigidez.
3. Obtener las frecuencias propias y los modos normales de vibración para el caso $k/m = 4g/\ell$.

§1. El sistema tiene dos grados de libertad, que tomaremos como la elongación x del resorte a partir de su posición de equilibrio, y el ángulo θ que forma el hilo con la vertical. La energía potencial vale

$$V = -mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2\,, \tag{1}$$

mientras que la energía cinética resulta

$$T = \frac{1}{2}3m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta)\,. \tag{2}$$

La expresión de la Lagrangiana es por tanto

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(4\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{3}$$

§2. Obviamente la posición de equilibrio estable es en el origen de las coordenadas tomadas, $(x,\theta) = (0,0)$. La forma más rápida de obtener las ecuaciones linealizadas para pequeñas oscilaciones es derivando las expresiones de la energía cinética (2) y potencial (1), que dan lugar a las matrices de masa y rigidez respectivamente.

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \partial^2 T/\partial\dot{x}^2 & \partial^2 T/\partial\dot{x}\partial\dot{\theta} \\ \partial^2 T/\partial\dot{\theta}\partial\dot{x} & \partial^2 T/\partial\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}_{(x,\theta)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 4m & m\ell \\ m\ell & m\ell^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} \partial^2 V/\partial x^2 & \partial^2 V/\partial x\partial\theta \\ \partial^2 V/\partial\theta\partial x & \partial^2 V/\partial\theta^2 \end{pmatrix}_{(x,\theta)=(0,0)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4mg/\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}\,. \tag{5}$$

Las ecuaciones linealizadas de la dinámica son en definitiva

$$\begin{pmatrix} 4m & m\ell \\ m\ell & m\ell^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 4mg/\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\,. \tag{6}$$

§3. Las frecuencias propias las obtenemos mediante la ecuación característica del problema de autovalores,

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 4m^2\ell^2\left(\frac{g}{\ell} - \lambda\right)^2 - m^2\ell^2\lambda^2\,. \tag{7}$$

Las soluciones de esta ecuación proporcionan las dos frecuencias propias del sistema:

$$4\left(\frac{g}{\ell} - \lambda\right)^2 = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \omega_1^2 = \dfrac{2g}{3\ell} \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = \dfrac{2g}{\ell} \end{cases} \tag{8}$$

Los modos de vibración se obtienen en la ecuación de autovalores para cada una de las frecuencias propias calculadas:

$$([\mathbf{K}] - \omega_1^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_1\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2/\ell \end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$([\mathbf{K}] - \omega_2^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_2\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2/\ell \end{Bmatrix}\,. \tag{10}$$