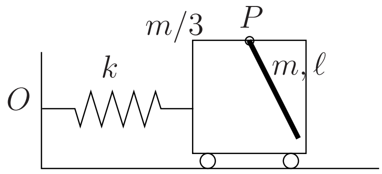
Mecánica – ICCP

EXAMEN FINAL (22 de junio del 2012)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla de masa m y longitud ℓ está suspendida de un punto P de una caja hueca de masa $m/3$. La caja, a su vez, está unida a un punto fijo O a través de un resorte de constante k, y se mueve en todo momento sobre una recta horizontal fija y lisa.



Se pide:

1. Identificar los grados de libertad del sistema y obtener la expresión de la Lagrangiana, así como las ecuaciones de Lagrange.
2. Ecuaciones de la dinámica para pequeños movimientos respecto a la posición de equilibrio estable. Expresión de las matrices de masa y de rigidez.
3. Obtener las frecuencias propias y los modos normales de vibración para el caso $k = 2mg/\ell$.

§1. El sistema tiene dos grados de libertad, la elongación x del resorte respecto a su posición natural y el ángulo θ que forma la varilla con la vertical descendente. La energía cinética es suma de la varilla y la caja,

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{3}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta}^2 \,. \tag{1}$$

La energía potencial proviene del resorte y del peso de la varilla:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta \,. \tag{2}$$

Formando la Lagrangiana

$$L = T - V = m\left(\frac{2}{3}\dot{x}^2 + \frac{1}{6}\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}kx^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos\theta \tag{3}$$

y derivando se obtienen las ecuaciones de la dinámica:

$$\frac{4}{3}m\ddot{x} + m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - m\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = 0 \,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\frac{\ell}{2}\ddot{x}\cos\theta + mg\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta = 0 \,. \tag{5}$$

§2. La posición de equilibrio es obviamente $(x, \theta) = (0, 0)$, y además es fácil comprobar que es estable (no lo sería si el péndulo estuviese invertido). Linealizando las ecuaciones (4), (5) se obtienen las ecuaciones para pequeñas oscilaciones:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}m\ddot{x} + m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta} + kx &= 0 \,, \\ \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\frac{\ell}{2}\ddot{x} + mg\frac{\ell}{2}\theta &= 0 \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Estas ecuaciones representan las vibraciones libres del sistema y pueden escribirse en forma matricial

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}\,, \tag{7}$$

donde las matrices de masa y rigidez son los coeficientes identificados en las ecuaciones (6):

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 4m/3 & m\ell/2 \\ m\ell/2 & m\ell^2/3 \end{pmatrix}; \qquad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\ell/2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Comprobamos que ambas matrices son simétricas y definidas positivas, propiedades esenciales para la existencia de modos de vibración y frecuencias propias reales positivas que se calcularán a continuación.

Alternativamente se podrían haber obtenido estas matrices directamente derivando las expresiones de la energía cinética y potencial,

$$[\mathbf{M}] = [M_{ij}] = [\partial^2 T/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\,; \quad [\mathbf{K}] = [K_{ij}] = [\partial^2 V/\partial q_i\partial q_j]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \tag{9}$$

§3. La ecuación característica para los autovalores λ es

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = \begin{vmatrix} k - \lambda(4m/3) & -\lambda m\ell/2 \\ -\lambda m\ell/2 & mg\ell/2 - \lambda(m\ell^2/3) \end{vmatrix} \tag{10}$$

Sustituyendo $k = 2mg/\ell$ y desarrollando se obtienen las frecuencias propias,

$$\left(2\frac{g}{\ell} - \frac{4}{3}\lambda\right)^2 = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{6g}{7\ell}\,, \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{6g}{\ell}\,. \tag{11}$$

Por último, los modos normales resultan de la ecuación de autovalores particularizada para cada una de las frecuencias propias:

$$\begin{pmatrix} 2mg/\ell - \lambda(4m/3) & -\lambda m\ell/2 \\ -\lambda m\ell/2 & mg\ell/2 - \lambda(m\ell^2/3) \end{pmatrix}_{\lambda=6g/7\ell} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2/\ell \end{Bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} 2mg/\ell - \lambda(4m/3) & -\lambda m\ell/2 \\ -\lambda m\ell/2 & mg\ell/2 - \lambda(m\ell^2/3) \end{pmatrix}_{\lambda=6g/\ell} \begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2/\ell \end{Bmatrix} \tag{13}$$