Mecánica – ICCP

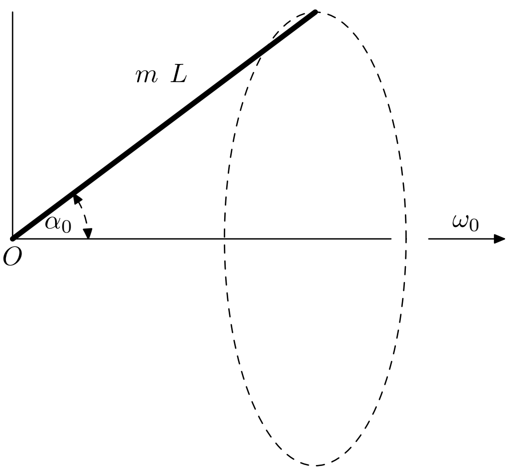
EXAMEN FINAL (22 de junio del 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

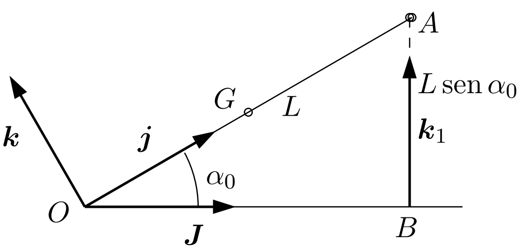
Una barra pesada de masa m y longitud L se mueve con uno de sus extremos fijo, formando un ángulo α_0 constante con un eje horizontal fijo. La barra además gira con velocidad angular ω_0 constante alrededor de este.

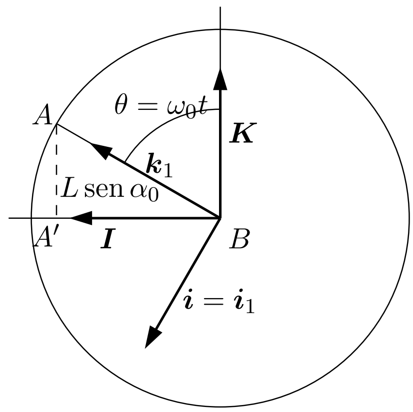
- Calcular el momento que hay que aplicar a la barra para obtener el citado movimiento y la reacción que se produce en el extremo fijo.



Es conveniente definir primero la geometría y los sistemas de referencia para expresar las coordenadas. Denominaremos OA a los extremos de la barra, A' la proyección de A sobre el plano horizontal por O y B al centro de la circunferencia descrita por A en su movimiento.

Como sistemas de referencia en primer lugar emplearemos un triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ligado al sólido, de forma que $\boldsymbol{j}$ esté orientado en dirección de la barra, $\boldsymbol{k}$ normal a la misma dentro del plano OAB formado por la barra y el eje fijo de la rotación ω_0, e $\boldsymbol{i}$ también normal a la barra formando un triedro a derechas con los anteriores. Por otra parte se considera también un triedro fijo en el que $\boldsymbol{J}$ es el eje horizontal de la rotación ω_0, $\boldsymbol{K}$ la vertical ascendente e $\boldsymbol{I}$ horizontal normal a los anteriores. En la figura adjunta superior se representa el plano OAB que contiene a la barra OA y al eje de rotación AB en verdadera magnitud. Por otra parte en la figura inferior se representa el plano OXZ en verdadera magnitud, definiéndose los vectores unitarios $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}_1)$ resultantes del giro $\theta = \omega_o t$ de los vectores fijos $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{K})$. Este ángulo θ se mide desde el punto superior de la trayectoria de A.





La barra constituye un sólido rígido degenerado sin dimensión transversal, cuyo tensor de inercia en los ejes del sólido es

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A = \frac{1}{3} m L^2 . \tag{1}$$

La velocidad angular de la barra es

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 \boldsymbol{J} = \omega_0 (\cos\alpha_0\, \boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\alpha_0\, \boldsymbol{k}) . \tag{2}$$

El momento cinético de la barra respecto a O resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = -A\omega_0 \operatorname{sen}\alpha_0\, \boldsymbol{k} . \tag{3}$$

Aplicamos el principio del momento cinético teniendo en cuenta que la expresión anterior define una componente constante relativo al triedro del sólido:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \cancel{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O\right)_{\mathrm{rel}}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_O = -A\omega_0^2 \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0\, \boldsymbol{i}\,. \tag{4}$$

El momento en O es suma del momento que produce el peso de la barra y de un momento adicional hay que aplicar para que el movimiento sea el descrito,

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{L}{2}\boldsymbol{j} \wedge (-mg\,\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{M}_a\,. \tag{5}$$

Para desarrollar esta expresión tenemos en cuenta la descomposición del vector unitario $\boldsymbol{K}$ en función de los vectores del triedro del cuerpo. Esta se puede obtener desarrollando el cambio de triedro en dos etapas, primero el giro θ alrededor de $\boldsymbol{J}$ que origina el triedro $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{k}_1)$ seguido del giro α_0 alrededor de $\boldsymbol{i}_1$ que origina el triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, siendo $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_1$ (ver figuras de la página anterior):

$$\boldsymbol{K} = \cos\theta\,\boldsymbol{k}_1 - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} = \cos\theta(\cos\alpha_0\,\boldsymbol{k} + \operatorname{sen}\alpha_0\,\boldsymbol{j}) - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}\,. \tag{6}$$

De esta forma, desarrollando el producto vectorial y despejando en (5) se obtiene el momento $\boldsymbol{M}_a$ pedido:

$$\boldsymbol{M}_a = -\frac{1}{3}mL^2\omega_0^2 \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0\,\boldsymbol{i} + mg\frac{L}{2}\big(\cos\theta\cos\alpha_0\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}\big)\,. \tag{7}$$

En esta expresión el primer término es un momento contenido en el plano tangente al cono por la generatriz correspondiente a la varilla, que obliga a que el ángulo α_0 se mantenga constante, ya que la fuerza centrífuga tendería a aumentarlo en ausencia de otras acciones. Por otra parte el segundo término contrarresta el momento debido al peso y está contenido en el plano horizontal.

La reacción en O se obtiene del teorema del movimiento del centro de masa,

$$\boldsymbol{F}_O = mg\,\boldsymbol{K} + m\,\boldsymbol{a}_G\,. \tag{8}$$

Para determinar $\boldsymbol{a}_G$ basta considerar que G describe con velocidad constante una circunferencia de radio $(L/2)\operatorname{sen}\alpha_0$:

$$\boldsymbol{a}_G = -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha_0\,\omega_0^2\,\boldsymbol{k}_1\,. \tag{9}$$

El resultado final se puede expresar en el triedro fijo o en el triedro del sólido, empleando la expresión (6) y las figuras de la página anterior:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_O &= mg\,\boldsymbol{K} - m\frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha_0\,\omega_0^2\big(\cos\theta\,\boldsymbol{K} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{I}\big)\\ &= mg\big(\cos\theta\,\cos\alpha_0\,\boldsymbol{k} + \cos\theta\,\operatorname{sen}\alpha_0\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}\big) - m\frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha_0\,\omega_0^2\big(\cos\alpha_0\,\boldsymbol{k} + \operatorname{sen}\alpha_0\,\boldsymbol{j}\big)\,.\end{aligned} \tag{10}$$