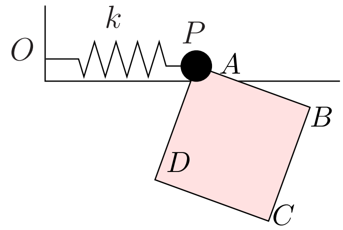
# Mecánica – ICCP

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2012)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 2º* (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.




Una placa cuadrada $ABCD$, de masa $m$ y lado $2b$, está suspendida por su vértice $A$, dentro de un plano vertical, de una partícula $P$ de masa $m$, que a su vez, está unida a un punto fijo $O$ a través de un resorte lineal de constante $k$, y se mueve en todo momento sobre una recta horizontal fija y lisa.

Se pide:

1. Identificar los grados de libertad del sistema y obtener la expresión de la Lagrangiana, así como las ecuaciones de Lagrange para el movimiento en el caso más general.
2. Ecuaciones de la dinámica para el caso de pequeños movimientos respecto a la posición de equilibrio estable. Expresión de las matrices de masa y de rigidez.
3. Obtener las frecuencias propias y los modos normales de vibración para el caso $kb = mg\sqrt{2}$.

**§1.** El sistema tiene dos grados de libertad, la elongación $x$ del resorte respecto a su posición natural y el ángulo $\theta$ que forma la diagonal del cuadrado con la vertical descendente. La energía cinética es suma de la partícula y de la placa, que a su vez tiene componentes de traslación y rotación. El momento de inercia central del cuadrado es

$$I_G = \frac{1}{12}m(4b^2 + 4b^2) = \frac{2}{3}mb^2\,. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta la velocidad del centro del cuadrado, la expresión de la energía cinética del conjunto es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + (\sqrt{2}b\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}\sqrt{2}b\dot{\theta}\cos\theta\big) + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mb^2\dot{\theta}^2 = m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}mb^2\dot{\theta}^2 + m\sqrt{2}b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\,. \tag{2}$$

La energía potencial proviene del resorte y del peso del cuadrado:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg\sqrt{2}b\cos\theta\,. \tag{3}$$

La función Lagrangiana vale

$$L = T - V = m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}mb^2\dot{\theta}^2 + m\sqrt{2}b\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 + mg\sqrt{2}b\cos\theta \tag{4}$$

y derivando se obtienen las ecuaciones de la dinámica:

$$2m\ddot{x} + m\sqrt{2}b\ddot{\theta}\cos\theta - m\sqrt{2}b\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{8}{3}mb^2\ddot{\theta} + m\sqrt{2}b\ddot{x}\cos\theta + mg\sqrt{2}b\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{6}$$

**§2.** La posición de equilibrio es obviamente $(x, \theta) = (0, 0)$, y además es fácil comprobar que es estable (no lo sería si el cuadrado estuviese invertido en $\theta = \pi$). Linealizando las ecuaciones (5), (6) se obtienen las ecuaciones para pequeñas oscilaciones:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} + m\sqrt{2}b\ddot{\theta} + kx = 0\,, \\ m\sqrt{2}b\ddot{x} + \frac{8}{3}mb^2\ddot{\theta} + mg\sqrt{2}b\theta = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Estas ecuaciones representan las vibraciones libres del sistema y pueden escribirse en forma matricial

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}\,, \tag{8}$$

donde las matrices de masa y rigidez son los coeficientes identificados en las ecuaciones (7):

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 2m & m\sqrt{2}b \\ m\sqrt{2}b & \frac{8}{3}mb^2 \end{pmatrix}; \qquad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\sqrt{2}b \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Comprobamos que ambas matrices son simétricas y definidas positivas, propiedades esenciales para la existencia de modos de vibración y frecuencias propias reales y positivas que se calcularán a continuación.

Alternativamente se podrían haber obtenido estas matrices directamente derivando las expresiones de la energía cinética (2) y potencial (3),

$$[\mathbf{M}] = [M_{ij}] = [\partial^2 T/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\,; \quad [\mathbf{K}] = [K_{ij}] = [\partial^2 V/\partial q_i\partial q_j]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \tag{10}$$

**§3.** La ecuación característica para los autovalores $\lambda = \omega^2$ es

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = \begin{vmatrix} k - \lambda 2m & -\lambda m\sqrt{2}b \\ -\lambda m\sqrt{2}b & mg\sqrt{2}b - \lambda\frac{8}{3}mb^2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Sustituyendo $k = mg\sqrt{2}/b$ y desarrollando se obtienen las frecuencias propias,

$$m^2b^2\left[\frac{10}{3}\lambda^2 - \frac{14\sqrt{2}}{3}\frac{g}{b}\lambda + 2\frac{g^2}{b^2}\right]^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\{1,2\}} = \omega^2_{\{1,2\}} = \frac{g}{b}\frac{\sqrt{2}(7 \pm \sqrt{19})}{10}\,. \tag{12}$$

Los valores con decimales de las frecuencias propias resultan

$$\omega_1 = 1{,}2674\sqrt{\frac{g}{b}}\,; \quad \omega_2 = 0{,}6112\sqrt{\frac{g}{b}}\,. \tag{13}$$

Por último, los modos normales resultan de la ecuación de autovalores particularizada para cada una de estas frecuencias propias:

$$\begin{pmatrix} k - \lambda 2m & -\lambda m\sqrt{2}b \\ -\lambda m\sqrt{2}b & mg\sqrt{2}b - \lambda\frac{8}{3}mb^2 \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_1} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{19})}{(7+\sqrt{19})b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{0{,}7917}{b} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k - \lambda 2m & -\lambda m\sqrt{2}b \\ -\lambda m\sqrt{2}b & mg\sqrt{2}b - \lambda\frac{8}{3}mb^2 \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_2} \begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}(-2+\sqrt{19})}{(7-\sqrt{19})b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1{,}2631}{b} \end{Bmatrix}$$