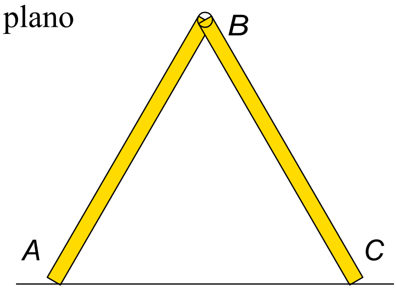
EXAMEN EXTRAORDINARIO (10 de septiembre de 2012)

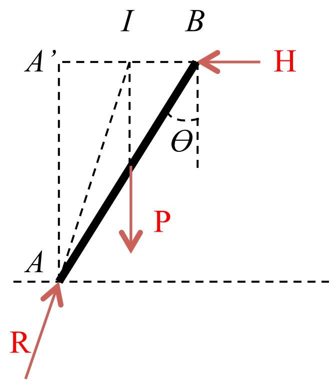
Ejercicio 3º (puntuación: 10⁄45) Tiempo: 60 min.

Dos barras homogéneas iguales AB y BC, de masa m y longitud $2b$, están articuladas en sus extremos B. Se desea que queden en equilibrio sobre un plano horizontal. Se pide:



1. Si el plano es rugoso, con coeficiente de rozamiento de valor 0,5 ¿cuál será el máximo valor del ángulo ABC?
2. Si el plano es liso, puede colocarse un resorte elástico entre A y C. Suponiendo la longitud natural de este resorte nula, encontrar el valor de su constante elástica para que el sistema quede en equilibrio. Demostrar que no puede conseguirse que el equilibrio sea estable.

1.- Aislemos la barra *AB,* sobre la que actúan tres fuerzas:



- Su peso P
- La reacción *H* entre las dos barras (que debe ser horizontal por la simetría del conjunto).
- La reacción *R* en el apoyo sobre el suelo.

Como las dos primeras se cortan en *I* (punto medio de *A'B*), también *R* debe pasar por dicho punto, por lo que formará con la vertical (normal al apoyo en *A*) el mismo ángulo que *AI*, cuyo valor máximo será el del ángulo de rozamiento φ.

Luego:

$$\text{tg}\varphi = 0{,}5 = \frac{A'I}{AA'} = \frac{b\,\text{sen}\theta}{2b\cos\theta} = {}^{1}\!/_{2}\ \text{tg}\theta \quad \rightarrow \quad \text{tg}\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = 45º$$

luego el máximo valor del ángulo *ABC* será $2\,\Theta = 90º$

2.- El potencial del sistema, en función del ángulo Θ vale:

$$V(\theta) = 2\,P\,b\cos\theta + {}^{1}\!/_{2}\,k(4b\,\text{sen}\theta)^2$$

En el equilibrio:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = -2\,P\,b\,\text{sen}\theta + 16\,k\,b^2\,\text{sen}\theta\cos\theta \quad \rightarrow \quad k = \frac{P}{8\,b\cos\theta} = \frac{P\sqrt{2}}{8b}$$

(puede comprobarse inmediatamente que $k\,AC$ es el valor de la fuerza de rozamiento)

La estabilidad nos la da que la derivada segunda sea positiva. Veamos:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -2\,P\,b\cos\theta + 16\,k\,b^2\cos 2\theta = \{\text{para } \theta = 45º\} = -P\,b\,\sqrt{2} < 0$$

Luego el equilibrio será inestable, c.q.d.