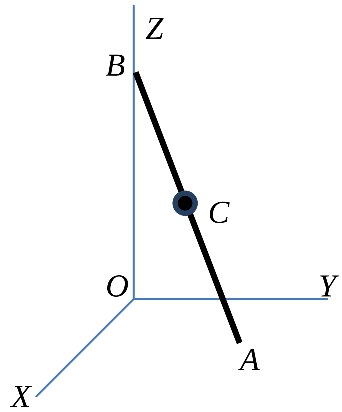
Mecánica - ICCP

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de septiembre del 2012)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla AB, homogénea, de masa m y longitud $2b$, se mueve de modo que su extremo A permanece sobre un plano horizontal OXY, fijo y liso, mientras que el otro extremo B desliza sobre una recta vertical OZ, fija y lisa. En el centro C de la varilla está unida una partícula de masa m.

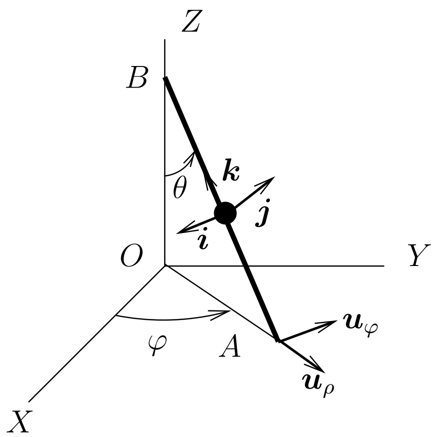


Se pide:

1. Encontrar los grados de libertad de la varilla y definir unos parámetros adecuados para representarlos.
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento, expresándolas, en su caso.
3. Expresiones de las reacciones en A y B, en función de los parámetros y sus derivadas temporales.

⋆

1.— El sistema posee dos grados de libertad (θ, φ).



2.— Existen dos integrales primeras: la correspondiente a la conservación de la energía y la conservación del momento cinético respecto al eje vertical OZ. Las fuerzas activas derivan de potencial y todas las fuerzas o son paralelas a dicho eje o cortan al mismo.

La velocidad angular de la varilla se expresa a través de las derivadas de los grados de libertad del sigueinte modo:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{K} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

La velocidad de la partícula coincide con la del CDM de la varilla:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{BC} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{Z}_B \boldsymbol{K} = -2b\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta(\cos\theta\boldsymbol{k} + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j}) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_G &= -b\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} + b\dot{\theta}(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)\boldsymbol{j} - 2b\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\boldsymbol{k} \\ &= -b\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} + b\dot{\theta}(\cos 2\theta\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}2\theta\,\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{4}$$

El tensor de inercia de la varilla expresado en los ejes $(C, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ es diagonal, siendo los momentos principales: $A = B = (1/3)mb^2$, $C = 0$. El potencial es $V = 2mgb\cos\theta$ por lo que la energía total resulta:

$$E = mv_C^2 + +\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} + V = \frac{7}{6}mb^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta) + 2mgb\cos\theta = (\text{cte}) \tag{5}$$

La segunda integral primera, correspondiente a la conservación del momento cinético con respecto al eje vertical OZ se presenta en la ecuación siguiente:

$$H_Z = \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}_B \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{K} + 2m(\boldsymbol{BC} \wedge \boldsymbol{v}_C) \cdot \boldsymbol{K} = \frac{7}{3} m b^2 \dot{\varphi} \operatorname{sen}^2 \theta = (\text{cte}) \tag{6}$$

3.— Las reacciones se obtienen a partir de la ecuación de la cantidad del movimiento:

$$\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B - 2mg\boldsymbol{K} = 2m\boldsymbol{a}_C \tag{7}$$

Resulta conveniente expresar la ecuación (7) en coordenadas cilíndricas. Expresando $\boldsymbol{r}_C = Z_B\boldsymbol{K} + \boldsymbol{BC}$, la aceleración se puede escribir en dicho sistema como:

$$\boldsymbol{a}_C = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{u}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{u}_\varphi + \ddot{Z}_C\boldsymbol{K} \tag{8}$$

donde $\rho = b \operatorname{sen} \theta$ y $Z_C = b \cos \theta$. Las ecuaciones resultan:

$$R_{Az} = 2mg - 2mb(\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \tag{9}$$

$$R_{B\rho} = 2mb(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \dot{\varphi}^2) \tag{10}$$

$$R_{B\varphi} = 2mb(\ddot{\varphi} \operatorname{sen} \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta) \tag{11}$$

Si se deriva la ecuación (6) y sustituye en (11) se deduce que $R_{B\varphi} = 0$