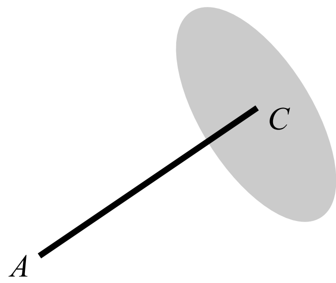
Mecánica - ICCP

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (26 de noviembre del 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido pesado S está formado por un disco circular (homogéneo, de centro C, radio R y masa M) al que va soldada una barra AC (homogénea, de longitud b y masa m) siguiendo su eje. El extremo A está fijo. Se pide:



1. Componentes del tensor de inercia de S en A.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento, señalando las integrales primeras que existan.
3. Se pone S en movimiento con las siguientes condiciones iniciales:
   a) La barra AC forma un ángulo de 60° con la vertical ascendente.
   b) La velocidad de rotación propia vale ω_1.
   c) La velocidad de precesión (alrededor del eje vertical) vale ω_2. Encontrar en qué condiciones el punto C describirá una circunferencia horizontal. Se tomarán los valores $M = 4m$ y $b = R\sqrt{3}$.

---

§1. Emplearemos para las componentes del tensor de inercia y para el resto del problema unos ejes móviles ligados al sólido pero sin heredar la rotación propia (*"triedro intermedio"*), de forma que la dirección Cz es según AC, Cy según la recta de máxima pendiente dentro del plano del disco hacia arriba, y Cx dentro del plano del disco y horizontal formando un triedro a derechas con las demás. El tensor de inercia se puede obtener como suma de los de la barra y del disco, ambos calculados en A mediante el Th de Steiner:

$$[\boldsymbol{I}_A] = [\boldsymbol{I}_{A,\text{disco}}] + [\boldsymbol{I}_{A,\text{barra}}] = \begin{pmatrix} M(\frac{R^2}{4}+b^2)+\frac{1}{3}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & M(\frac{R^2}{4}+b^2)+\frac{1}{3}mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Por simplificar la escritura, en el desarrollo de las expresiones que sigue denominaremos a las componentes principales de este tensor (A, A, C).

§2. Se trata de un sólido con un punto A fijo, por lo tanto con tres grados de libertad, para los que podemos tomar los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) con su significado habitual: $\psi\,\boldsymbol{K}$ es una primera rotación alrededor del eje vertical fijo AZ, $\theta\,\boldsymbol{i}$ la rotación siguiente alrededor de Ax, y por último $\varphi\,\boldsymbol{k}$ la rotación propia alrededor de Az. Dado que el sólido es de revolución emplearemos el triedro intermedio para desarrollar las componentes, en el que el vector unitario vertical se expresa como

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}\,, \tag{2}$$

y la velocidad angular es por tanto

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\varphi\,\boldsymbol{k} = \dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \underbrace{(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)}_{r}\boldsymbol{k}\,. \tag{3}$$

Al tratarse de un sólido simétrico sometido a cargas gravitatorias conservativas, se conservan tres magnitudes cinéticas, cuyas integrales primeras sirven como las tres ecuaciones de la dinámica del sistema: 1) Conservación del momento cinético H_Z según el eje fijo AZ, al ser nulo el momento de las fuerzas exteriores respecto de este eje; 2) Conservación del momento cinético H_z según el eje de revolución Az, al ser nulo el momento de las fuerzas exteriores también respecto de este eje; y 3) Conservación de la energía $E = T + V$, al ser todas las fuerzas conservativas. Tendremos en cuenta en primer lugar la expresión del momento cinético en A,

$$\boldsymbol{H}_A = \boldsymbol{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega} = A\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j} + Cr\,\boldsymbol{k}\,. \tag{4}$$

De esta forma la primera ecuación de conservación es

$$H_Z = A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\theta + Cr\cos\theta = \text{cte.} \tag{5}$$

La siguiente resulta

$$H_z = Cr = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = \text{cte.} \tag{6}$$

Y por último, la conservación de la energía

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_A\cdot\boldsymbol{\Omega} + V_{\text{peso}} \\ &= \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}Cr^2 + M_T g d\cos\theta = \text{cte.}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

siendo $M_T = M + m$ (masa total) y d la distancia del centro de masas conjunto, es decir $M_T d = Mb + mb/2$.

Adicionalmente se puede expresar también la Lagrangiana,

$$L = T - V = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}Cr^2 - M_T g d\cos\theta\,, \tag{8}$$

y a partir de ella las correspondientes ecuaciones de Lagrange. En primer lugar, se comprueba que tanto la coordenada ψ como φ son cíclicas, resultando las integrales primeras correspondientes las mismas ecuaciones de conservación de momento cinético antes expresadas:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = H_Z\ (\text{cte})\,; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = H_z\ (\text{cte})\,. \tag{9}$$

La ecuación de Lagrange en θ resulta

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + Cr\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta - M_T g d\,\mathrm{sen}\,\theta = 0\,. \tag{10}$$

Esta ecuación coincide también con la ecuación de Euler en el triedro intermedio para θ.

§3. La condición para que el movimiento de C sea una circunferencia horizontal es $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Particularizando en la ecuación (10) y descontando las soluciones $\theta = \{0, \pi\}$ resulta

$$A\dot{\psi}^2\cos\theta - Cr\dot{\psi} + M_T g d = 0\,. \tag{11}$$

El resto de condiciones iniciales son $\theta = \pi/3$, $\dot{\varphi} = \omega_1$ y $\dot{\psi} = \omega_2$. Sustituyendo permiten obtener la relación necesaria entre ω_1 y ω_2:

$$A\omega_2^2\frac{1}{2} - C(\frac{\omega_2}{2} + \omega_1)\omega_2 + M_T g d = 0\,. \tag{12}$$

Considerando los valores definidos en el enunciado $M = 4m$ y $b = R\sqrt{3}$, y suponiendo un valor dado para ω_2 se obtiene el valor necesario de ω_1:

$$\omega_1 = \frac{\frac{1}{2}(A - C)\omega_2^2 + M_T g d}{C\omega_2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\frac{g}{R}\frac{1}{\omega_2} + 3\omega_2\,. \tag{13}$$