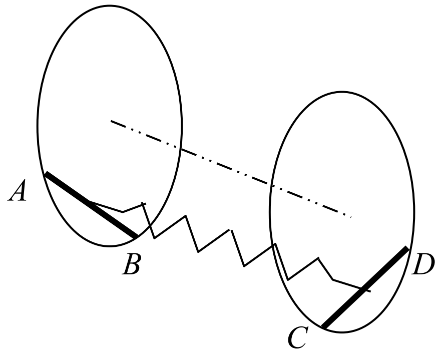
1er apellido ____

2º apellido ______________________________ Nombre ________________

EJERCICIO 3º 60 minutos

Sobre un aro vertical (fijo y liso) de radio $2b$ se mueve una barra homogénea AB, de masa m y longitud $2b$. Sobre otro aro igual (coaxial con el primero y distante $3b$) se mueve otra barra CD (igual a la primera). Los centros de amabas barras están unidos mediante un resorte elástico de constante k y longitud natural despreciable.



Se pide:

1. Determinar los grados de libertad del sistema, elegir unos parámetros adecuados para representarlos y obtener la lagrangiana.
2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento, linealizándolas para las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
3. Obtener las frecuencias propias y las coordenadas normales.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3º DEL EXAMEN DE 26-XI-12

1. El sistema tiene 2 grados de libertad, que pueden representarse adecuadamente por los ángulos que giran las barras. En concreto, por los ángulos θ y φ que forman, con la vertical descendente, las líneas que van desde el centro de cada aro hasta el centro de la barra correspondiente. Como el movimiento de cada barra es un giro alrededor del eje común a los aros, la energía cinética valdrá:

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}b^2m+3b^2m\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}b^2m+3b^2m\right)\dot{\varphi}^2=\frac{5}{3}mb^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)$$

El potencial gravitatorio valdrá:

$$V_g=-mgb\sqrt{3}\left(\cos\theta+\cos\varphi\right)$$

Y el potencial elástico del resorte:

$$V_e=\frac{1}{2}k\left[9b^2+\left(2b\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^2\right]$$

Con lo que la lagrangiana será:

$$L=\frac{5}{3}mb^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)+mgb\sqrt{3}\left(\cos\theta+\cos\varphi\right)-6kb^2\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\varphi}{2}+cte$$

2. Las ecuaciones de Lagrange serán:

$$\left.\begin{aligned}\frac{10}{3}mb^2\ddot{\theta}+mgb\sqrt{3}\mathrm{sen}\theta+6kb^2\mathrm{sen}\frac{\theta-\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=0\\ \frac{10}{3}mb^2\ddot{\varphi}+mgb\sqrt{3}\mathrm{sen}\varphi-6kb^2\mathrm{sen}\frac{\theta-\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=0\end{aligned}\right\}$$

Que linealizadas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable (que evidentemente es $\theta=\varphi=0$) nos da:

$$\left.\begin{aligned}\frac{10}{3}mb^2\ddot{\theta}+\left(mgb\sqrt{3}+3kb^2\right)\theta-3kb^2\varphi=0\\ \frac{10}{3}mb^2\ddot{\varphi}-3kb^2\theta+\left(mgb\sqrt{3}+3kb^2\right)\varphi=0\end{aligned}\right\}$$

3. Para obtener las frecuencias propias y las coordenadas normales se puede seguir el procedimiento general, pero, en este caso, una simple inspección del sistema planteado nos hacer ver que si sumamos y restamos las dos ecuaciones obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}\frac{10}{3}mb^2\left(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\right)+mgb\sqrt{3}\left(\theta+\varphi\right)=0\\ \frac{10}{3}mb^2\left(\ddot{\theta}-\ddot{\varphi}\right)+\left(mgb\sqrt{3}+6kb^2\right)\left(\theta-\varphi\right)=0\end{aligned}\right\}$$

Que, como puede verse, son dos ecuaciones desacopladas en $\alpha=\theta+\varphi$ y $\beta=\theta-\varphi$, lo que nos dice que α y β son coordenadas normales. Estas mismas ecuaciones nos permiten expresar directamente las frecuencias propias:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{g}{b}}\qquad;\qquad\omega_2=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{g}{b}+\frac{9}{5}\frac{k}{m}}$$

NOTA: Resulta más adecuado considerar como coordenadas normales los valores mitad de los indicados, ya que admiten una interpretación muy fácil: ½ α nos sitúa la bisectriz de las líneas inicialmente adoptadas para determinar θ y φ, mientras que ½ β nos sitúa estas dos líneas respecto de la bisectriz.