Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (25 de Enero de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Un movimiento oscilatorio lineal amortiguado está definido por la ecuación $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$. Si el sistema es separado ligeramente de la posición de equilibrio y soltado, *deducir* la expresión de la frecuencia ω del movimiento oscilatorio en función de las constantes m, c y k. Al cabo de un tiempo suficientemente grande para que se alcance un régimen permanente, ¿cuál será el movimiento? (2.5 ptos.)

Escribir la expresión de la derivada (absoluta) de un vector en función de su derivada en un sistema móvil. Emplear esta expresión para *deducir* el campo de aceleraciones del sólido rígido. (2.5 ptos.)

Definir el concepto de "desplazamientos virtuales," y *enunciar* el principio de los trabajos virtuales para un sistema general de n partículas. (2.5 ptos.)

Un sistema mecánico está descrito por coordenadas generalizadas libres $\{q_j,\ j = 1, \dots n\}$, que definen las posiciones $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$, siendo la función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$. Si $\partial \boldsymbol{r}_i / \partial t = 0$, ¿qué condición debe cumplir L para que la energía total $E = T + V$ sea constante? *justificar* la respuesta. (2.5 ptos.)

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (25 de Enero de 1993)

Borrador

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (25 de Enero de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Un movimiento oscilatorio lineal amortiguado está definido por la ecuación $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$. Si el sistema es separado ligeramente de la posición de equilibrio y soltado, *deducir* la expresión de la frecuencia ω del movimiento oscilatorio en función de las constantes m, c y k. Al cabo de un tiempo suficientemente grande para que se alcance un régimen permanente, ¿cuál será el movimiento? (2.5 ptos.)

Suponemos una solución del tipo $x = ae^{rt}$, pudiendo ser a y r complejos. Si sustituimos en la ecuación, se obtiene

$$ae^{rt}(mr^2 + cr + k) = 0,$$

de donde se deduce que r ha de cumplir la ecuación característica

$$mr^2 + cr + k = 0.$$

Las soluciones,

$$r = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}},$$

han de ser imaginarias para que el movimiento sea oscilatorio. Así,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{c}{2m}t}(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

siendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$.

Al cabo del tiempo, el sistema queda en reposo.

Escribir la expresión de la derivada (absoluta) de un vector en función de su derivada en un sistema móvil. Emplear esta expresión para *deducir* el campo de aceleraciones del sólido rígido. (2.5 ptos.)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{abs} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{p},$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad de rotación del sistema móvil. Derivando de esta manera dos veces el vector posición $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en un sólido $\boldsymbol{v}_{rel} = \boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{0}$, la expresión del campo de velocidades

Definir el concepto de "desplazamientos virtuales," y *enunciar* el principio de los trabajos virtuales para un sistema general de n partículas. (2.5 ptos.)

Sea un sistema de masas m_i, con coordenadas $\boldsymbol{r}_i$, para $i = 1, \dots n$. Se define como desplazamientos virtuales $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ a un conjunto cualquiera de desplazamientos infinitesimales, elegidos de manera arbitraria, para un instante fijo de t ($\delta t = 0$). Aunque en principio podrían incluso vulnerar los vínculos, conviene restringirse a $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$ compatibles con los mismos.

El P.T.V. afirma que

> *"en un sistema sometido a enlaces lisos, el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas (es decir, sin incluir las reacciones) para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles es nulo:"*

$$\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \textit{ compat.}$$

El P.T.V. es condición necesaria y suficiente para que un sistema esté en equilibrio, siendo una alternativa a los métodos de equilibrio en fuerzas.

Un sistema mecánico está descrito por coordenadas generalizadas libres $\{q_j,\ j = 1, \dots n\}$, que definen las posiciones $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$, siendo la función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$. Si $\partial \boldsymbol{r}_i / \partial t = 0$, ¿qué condición debe cumplir L para que la energía total $E = T + V$ sea constante? *justificar* la respuesta. (2.5 ptos.)

Si $\partial \boldsymbol{r}_i / \partial t = 0$, $\Rightarrow$ $T = a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ (expresión homogénea cuadrática) (se sobreentiende el sumatorio en índices repetidos). Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = a_{ij} \dot{q}_i; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L &= 2T - (T - V) = T + V. \end{aligned}$$

Por otra parte, se sabe que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Por tanto la condición necesaria y suficiente para que sea $T + V = \text{Cte.}$ es $\partial L / \partial t = 0$.