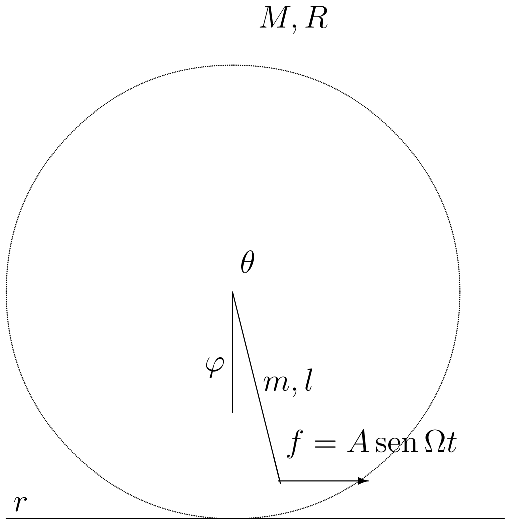
Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (25 de Enero de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 60 min.

Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r, manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \operatorname{sen} \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:



a. Tomando como coordenadas el giro del disco θ y el ángulo de la varilla con la vertical φ, expresar el trabajo δW para un desplazamiento virtual arbitrario.

b. Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.

c. Ecuaciones de Lagrange del movimiento.

d. Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.

e. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (25 de Enero de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 60 min.

Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r, manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \operatorname{sen} \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:

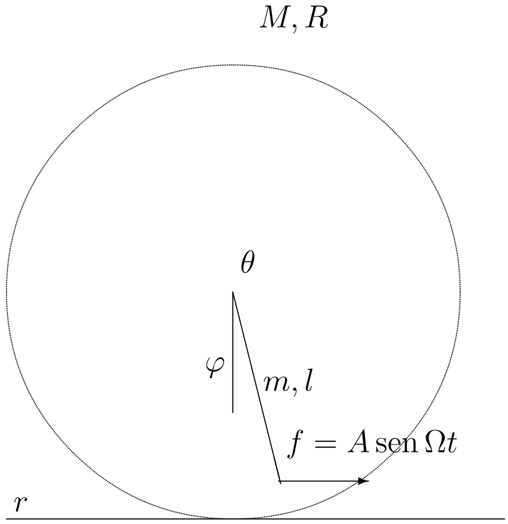
a. Tomando como coordenadas el giro del disco θ y el ángulo de la varilla con la vertical φ, expresar el trabajo δW para un desplazamiento virtual arbitrario.

b. Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.

c. Ecuaciones de Lagrange del movimiento.

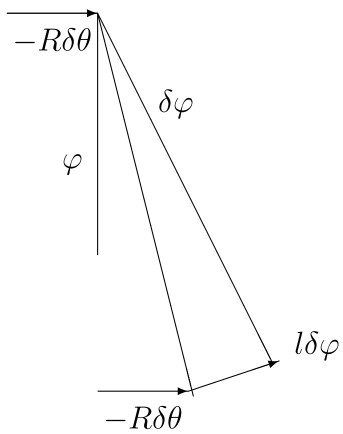
d. Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.

e. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.



Tomando desplazamientos virtuales $\delta\theta$ y $\delta\varphi$, la expresión del trabajo de f es

$$\boxed{\delta W = (-R\delta\theta + l\delta\varphi\cos\varphi)A \operatorname{sen} \Omega t,}$$



e identificando coeficientes

$$\boxed{Q_\theta = -RA \operatorname{sen} \Omega t; \quad Q_\varphi = lA\cos\varphi \operatorname{sen} \Omega t.}$$

La energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot\theta^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2\dot\varphi^2}{4} + R^2\dot\theta^2 + lR\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot\varphi^2. \end{aligned}$$

La atracción gravitatoria proviene de un potencial $V = -mgl\cos\varphi$. Sería posible incluir su efecto a través de δW y las fuerzas generalizadas correspondientes, pero es preferible tenerlas en cuenta mediante una Lagrangiana parcial, $L = T - V$. En función de L y de las fuerzas Q_θ, Q_φ calculadas antes, las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(M+m)R^2\ddot\theta + \frac{1}{2}mlR\ddot\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}mlR\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi &= -AR\operatorname{sen}\Omega t, \\ \frac{1}{3}ml^2\ddot\varphi + \frac{1}{2}mlR\ddot\theta\cos\varphi + mgl\operatorname{sen}\varphi &= lA\cos\varphi\operatorname{sen}\Omega t. \end{aligned}$$

Aunque $\partial L/\partial\theta = 0$, θ no es cíclica, ya que existe una fuerza Q_θ en esa dirección. La energía total tampoco se conserva, por la acción de la fuerza f no conservativa. Por tanto no existen integrales primeras.

Para calcular la reacción horizontal de la rodadura, imponemos la coacción de rodadura a través de un multiplicador de Lagrange. Llamando x al desplazamiento horizontal del centro del disco (positivo hacia la derecha) y θ al giro del mismo, la ecuación de ligadura es

$$\dot{x} + R\dot{\theta} = 0,$$

lo que para desplazamientos virtuales $\delta\theta$, δx, $\delta\varphi$ equivale a

$$\delta x + R\delta\theta = 0.$$

Los coeficientes de esta expresión son pues

$$A^x = 1, \quad A^\theta = R, \quad A^\varphi = 0.$$

Estos coeficientes, afectados por el multiplicador λ, son los que hay que incluir en el lado derecho de las ecuaciones de Lagrange. Para hallar estas, debemos reformular L en función de x, θ y φ, considerando x y θ independientes:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2\dot{\varphi}^2}{4} + \dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{24}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Asimismo, la nueva expresión de δW debido a f es

$$\delta W = (\delta x + l\delta\varphi\cos\varphi)A\operatorname{sen}\Omega t,$$

de donde se obtiene

$$Q_x = A\operatorname{sen}\Omega t; \quad Q_\varphi = lA\cos\varphi\operatorname{sen}\Omega t; \quad Q_\theta = 0.$$

La ecuación de Lagrange en x es

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x + \lambda A^x \\
(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi &= A\operatorname{sen}\Omega t + \lambda
\end{aligned}$$

La reacción horizontal es precisamente el valor de λ,

$$\boxed{R_x = \lambda = (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi - A\operatorname{sen}\Omega t.}$$

O bien en función de θ,

$$R_x = (M+m)R\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi - A\operatorname{sen}\Omega t.$$