Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (24 de Mayo de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Deducir la ecuación vectorial del equilibrio para un cable flexible. (2.5 ptos.)

En un sistema con n grados de libertad sometido a oscilaciones lineales, *deducir* la ecuación característica que define las frecuencias propias de vibración. (2.5 ptos.)

Deducir las ecuaciones de la dinámica para un sólido rígido con un punto fijo (ecuaciones de Euler). (2.5 ptos.)

Dos sólidos A y B chocan entre sí, con coeficiente de restitución $e \leq 1$. En el caso más general, ¿qué se puede afirmar del valor de la energía cinética de A después de la percusión? *justificar* la respuesta. (2.5 ptos.)

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (24 de Mayo de 1993)

Borrador

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (24 de Mayo de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Deducir la ecuación vectorial del equilibrio para un cable flexible. (2.5 ptos.)

Sea un hilo sometido a fuerzas externas $\boldsymbol{f}$ por unidad de longitud del mismo. Supongamos un elemento AB de cable de longitud $\mathrm{d}s$, que estará sometido a fuerzas externas $\boldsymbol{f}\mathrm{d}s$ y tensiones $-\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}+\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ en los puntos A y B respectivamente. Planteando el equilibrio de fuerzas,

$$-\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{T}+\mathrm{d}\boldsymbol{T})+\boldsymbol{f}\mathrm{d}s=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{f}\mathrm{d}s=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

Por otra parte, el equilibrio de momentos en B, despreciando infinitésimos de segundo orden, impone

$$\mathrm{d}s\boldsymbol{t}\wedge(-\boldsymbol{T})+\frac{1}{2}\mathrm{d}s\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{f}\mathrm{d}s=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T}\wedge\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

(lo que equivale a decir que la tensión es tangente al hilo).

En un sistema con n grados de libertad sometido a oscilaciones lineales, *deducir* la ecuación característica que define las frecuencias propias de vibración. (2.5 ptos.)

La ecuación matricial linealizada del sistema en vibración libre es

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}.$$

Estudiamos soluciones armónicas del tipo $\{q\}=\{X\}\operatorname{sen}\omega t$, donde $\{X\}$ es un vector de constantes; derivando y sustituyendo en la ecuación matricial se obtiene

$$(-\omega^2[M]+[K])\{X\}\operatorname{sen}\omega t=\{0\}.$$

Al eliminar $\operatorname{sen}\omega t$, resulta la ecuación homogénea

$$(-\omega^2[M]+[K])\{X\}=\{0\}.$$

Para que existan soluciones distintas de la trivial ($\{X\}=\{0\}$) es necesario que la matriz de coeficientes sea singular,

$$|-\omega^2[M]+[K]|=0,$$

ecuación característica, cuyas n raíces reales positivas $(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$ son las frecuencias propias del sistema.

Deducir las ecuaciones de la dinámica para un sólido rígido con un punto fijo (ecuaciones de Euler). (2.5 ptos.)

Aplicando el teorema del momento cinético,

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Si se deriva en relación con el triedro del cuerpo, $\boldsymbol{I}_O$ se mantiene constante; por otra parte, se necesita añadir un término complementario de derivación, resultando

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

En componentes, tomando ejes principales,

$$\boldsymbol{I}_O \equiv \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{M}_O \equiv \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix};$$

resultando las 3 ecuaciones escalares ("ecuaciones de Euler"):

$$\begin{aligned} M_x &= A\dot{p} - (B - C)qr \\ M_y &= B\dot{q} - (C - A)rp \\ M_z &= C\dot{r} - (A - B)pq \end{aligned}$$

Dos sólidos A y B chocan entre sí, con coeficiente de restitución $e \leq 1$. En el caso más general, ¿qué se puede afirmar del valor de la energía cinética de A después de la percusión? *justificar* la respuesta. (2.5 ptos.)

La energía cinética de A, T_A, puede aumentar, conservarse, o disminuir, dependiendo de las condiciones del choque; en un caso general no se puede afirmar nada en este sentido. Sin embargo, es posible acotar su variación y valor final; denotando las energías cinéticas después del choque con una prima,

1. La energía cinética final de A no puede ser mayor que la energía cinética inicial del conjunto:
$$T'_A + T'_B \leq T_A + T_B \quad \Rightarrow \quad T'_A \leq T_A + T_B.$$

2. El aumento de T_A es menor o igual que T_B:
$$\Delta T_A = T'_A - T_A \leq T_B - T'_B \leq T_B.$$

3. La disminución de T_A es menor o igual que T_A
(ya que T'_A no puede ser negativa)