Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (24 de Mayo de 1993)

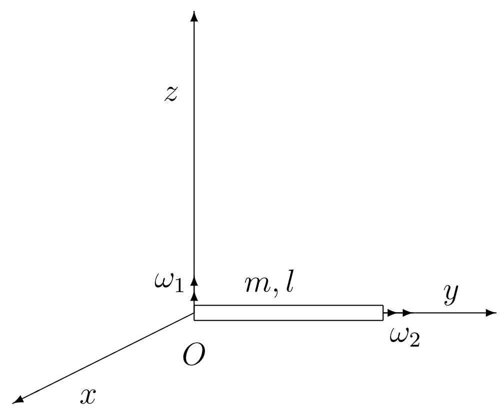
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 50 min.

Una barra de sección circular con radio R, longitud l y masa m tiene fijo un extremo O de su eje, sin más restricciones en su movimiento. En un momento determinado se halla con su eje horizontal, girando con velocidad angular ω_1 alrededor de un eje vertical y con velocidad de rotación propia ω_2 alrededor de su eje. Se pide

a. Integrales primeras del movimiento, en función de las condiciones iniciales dadas.

b. Calcular el valor de ω_2 necesario para que el eje de la barra se mantenga horizontal en todo instante.



Se trata de una peonza simétrica, con momentos principales de inercia

$$A = B = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right); \qquad C = \frac{1}{2}mR^2.$$

Emplearemos la notación usual de los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) y de las componentes de la velocidad angular en el triedro del cuerpo $\mathbf{\Omega} \equiv ||p, q, r||$, tomando como eje $\boldsymbol{k}$ de dicho triedro el Oy de la figura. Así, las condiciones iniciales son:

$$\theta = \pi/2; \quad p = 0; \quad q = \omega_1; \quad r = \omega_2$$
$$\dot\psi = q = \omega_1; \quad \dot\varphi = r = \omega_2; \quad \dot\theta = 0$$

Las integrales primeras son las tres de la peonza simétrica:

1. $r = \omega_2 \quad$ (cte.)
   (debido a la constancia del momento cinético según el eje de la barra);

2. $A\dot\psi \operatorname{sen}^2\theta + Cr\cos\theta = H = A\omega_1 \quad$ (cte.)
   (debido a la constancia del momento cinético según la vertical)

3. $T + V = \frac{1}{2}[A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \operatorname{sen}^2\theta) + Cr^2] + mg\frac{l}{2}\cos\theta \quad$ (cte.)
   debido a la constancia de la energía; simplificando,

$$\frac{1}{2}A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\operatorname{sen}^2\theta) + mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}A\omega_1^2.$$

Para la segunda parte del problema, es necesario verificar que existe la solución con $\theta = \pi/2, \ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$. Para ello se necesita plantear la ecuación de la dinámica en θ. La Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}[A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + Cr^2] - mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

Derivando, se obtiene la ecuación de Lagrange en θ

$$A\ddot{\theta} = A\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - Cr\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta.$$

Particularizando para $\ddot{\theta} = 0; \theta = \pi/2; \dot{\psi} = \omega_1; r = \omega_2$ se obtiene

$$C\omega_2\omega_1 = mg\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = \frac{gl}{R^2\omega_1}}.$$