Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

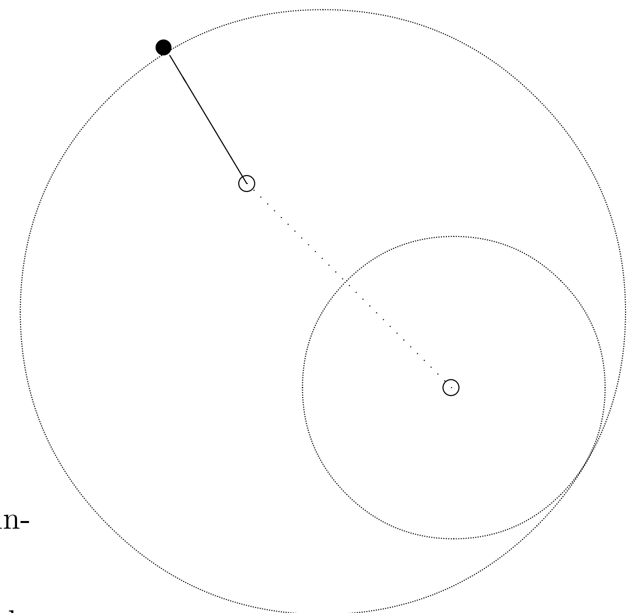
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (24 de Mayo de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 60 min.

Un aro de masa M y radio $2a$ puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto O de su perímetro que está fijo. A su vez, un disco de masa m y radio a rueda sin deslizar dentro del aro. Existe un resorte de constante k y longitud natural $2a$, uno de cuyos extremos está unido al centro del disco. El otro extremo está unido a una varilla de longitud a sin masa, soldada al aro en el punto O en dirección normal al perímetro, y que se mueve por tanto solidariamente con el aro (ver figura).

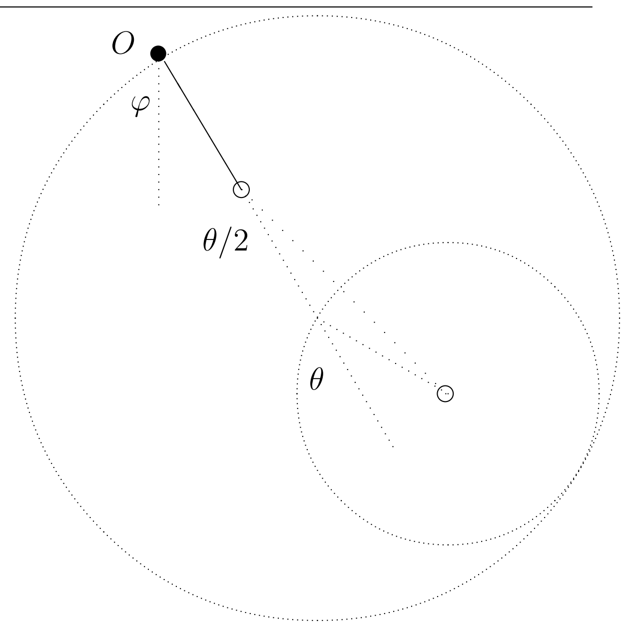


Se pide:

a. Ecuaciones del movimiento. ¿Existe alguna integral primera?

b. Para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio, ecuaciones linealizadas y obtención de modos normales y frecuencias propias.

El sistema posee 2 g.d.l., para los que escogemos los ángulos φ (rotación absoluta del aro) y θ (giro del centro del disco en su trayectoria circular respecto al centro del aro, relativo al mismo). La velocidad angular del disco relativa al aro ω_r se puede obtener mediante la expresión de la velocidad del centro del disco (relativa al aro):



$$-\omega_r a = \dot{\theta} a \quad \Rightarrow \quad \omega_r = -\dot{\theta}.$$

Así, la velocidad angular absoluta del disco es

$$\omega = \dot{\varphi} + \omega_r = \dot{\varphi} - \dot{\theta}.$$

Por otra parte, la longitud del muelle (l) se obtiene inmediatamente observando que constituye la base de un triángulo isósceles, cuyos lados y ángulos iguales valen a y $\theta/2$ respectivamente:

$$l = 2a\cos\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = l - 2a = 2a(\cos\frac{\theta}{2} - 1).$$

Podemos ya expresar la Lagrangiana,

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{(M8a^2)}_{I_O^{aro}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(\frac{1}{2}ma^2)}_{I_O^{\text{disco}}}(\dot{\varphi} - \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m[(2a\dot{\varphi})^2 + a^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + 4a^2\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\cos\theta] \\
&\quad - [-Mg2a\cos\varphi - mg(2a\cos\varphi + a\cos(\varphi + \theta)) + \frac{1}{2}k4a^2(\cos\frac{\theta}{2} - 1)^2]
\end{aligned}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned}
0 &= (8M + \frac{11}{2}m + 4m\cos\theta)a^2\ddot{\varphi} + (\frac{1}{2}m + 2m\cos\theta)a^2\ddot{\theta} - 2ma^2\dot{\theta}(2\dot{\varphi} + \dot{\theta})\operatorname{sen}\theta \\
&\quad + 2(M + m)ga\operatorname{sen}\varphi + mga\operatorname{sen}(\varphi + \theta) \\
0 &= (\frac{1}{2}m + 2m\cos\theta)a^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}ma^2\ddot{\theta} + 2ma^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta \\
&\quad + mga\operatorname{sen}(\varphi + \theta) + 2ka^2(1 - \cos\frac{\theta}{2})\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Bajo la suposición de θ, φ, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ pequeños, y tomando $M = m$, resultan las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{35}{2}ma^2\ddot{\varphi} + \frac{5}{2}ma^2\ddot{\theta} + 5mga\varphi + mga\theta \\
0 &= \frac{5}{2}ma^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}ma^2\ddot{\theta} + mga\varphi + mga\theta
\end{aligned}$$

Bajo la suposición de oscilaciones armónicas, resulta el problema de autovalores

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ \theta \end{array} \right\} = \{X\}\operatorname{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5\frac{g}{a} - \frac{35}{2}\omega^2 & \frac{g}{a} - \frac{5}{2}\omega^2 \\ \frac{g}{a} - \frac{5}{2}\omega^2 & \frac{g}{a} - \frac{3}{2}\omega^2 \end{pmatrix}\{X\} = 0. \tag{1}$$

Para que exista solución no trivial, ha de verificarse (ecuación característica):

$$\begin{vmatrix} 5\frac{g}{a} - \frac{35}{2}\omega^2 & \frac{g}{a} - \frac{5}{2}\omega^2 \\ \frac{g}{a} - \frac{5}{2}\omega^2 & \frac{g}{a} - \frac{3}{2}\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante y simplificando se obtiene

$$5\omega^4 - 5\frac{g}{a}\omega^2 + \frac{g^2}{a^2} = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\omega_1^2 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\frac{g}{a} = 0{,}7236\frac{g}{a}; \qquad \omega_2^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\frac{g}{a} = 0{,}2764\frac{g}{a}$$

Sustituyendo en la ecuación de autovalores (1) cada una de las frecuencias propias anteriores, resultan los vectores propios correspondientes:

$$\{a_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -9{,}4721 \end{array} \right\}, \qquad \{a_2\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -0{,}5279 \end{array} \right\}.$$