

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 2.º

(sólo 1er. Parcial)

Tiempo: 45 min.

Un satélite artificial de masa $m = 1000$ kg sigue una órbita elíptica alrededor de la tierra, con semieje mayor $a = 10000$ km y excentricidad $e = 0,01$. En el apogeo le alcanza otro satélite de masa $M = 5000$ kg, teniendo la velocidad de ambos cuerpos antes del contacto la misma dirección. El proceso de acoplamiento es instantáneo y ambos satélites quedan perfectamente unidos después de él. Calcular la velocidad relativa necesaria entre ambos satélites para conseguir que la órbita del satélite conjunto resultante sea circular.

Nota: el radio de la tierra es $R = 6366$ km

En el instante de la unión, llamamos v_1 a la velocidad de m , v_2 a la velocidad de M , y v_3 la de la nave conjunta resultante ($M + m$).

Relacionamos la velocidad con la posición mediante la fórmula

$$v^2 = GM_{tierra} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

En el apogeo es $r = a(1 + e)$, por lo que

$$(v_1)^2 = \underbrace{GM_{tierra}}_{gR^2} \left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right) = 9,81 \times (6,366 \times 10^6)^2 \left(\frac{2}{10,1 \times 10^6} - \frac{1}{10. \times 10^6} \right)$$

de donde se obtiene

$$v_1 = 6242,5 \text{ m/s}$$

La nave conjunta ha de seguir una órbita circular, de radio $a(1 + e)$, por lo que su velocidad la hallamos mediante

$$(v_3)^2 = \frac{GM_{tierra}}{a(1+e)} = \frac{9,81 \times (6,366 \times 10^6)^2}{10,1 \times 10^6} \Rightarrow v_3 = 6273,9 \text{ m/s.}$$

Imponiendo la conservación de la cantidad de movimiento en la unión,

$$mv_1 + Mv_2 = (M + m)v_3 \Rightarrow v_2 = \frac{(M + m)v_3 - mv_1}{M} = 6280,2 \text{ m/s}$$

por lo que la velocidad relativa ha de ser

$$v' = v_2 - v_1 = 37,7 \text{ m/s.}$$