Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

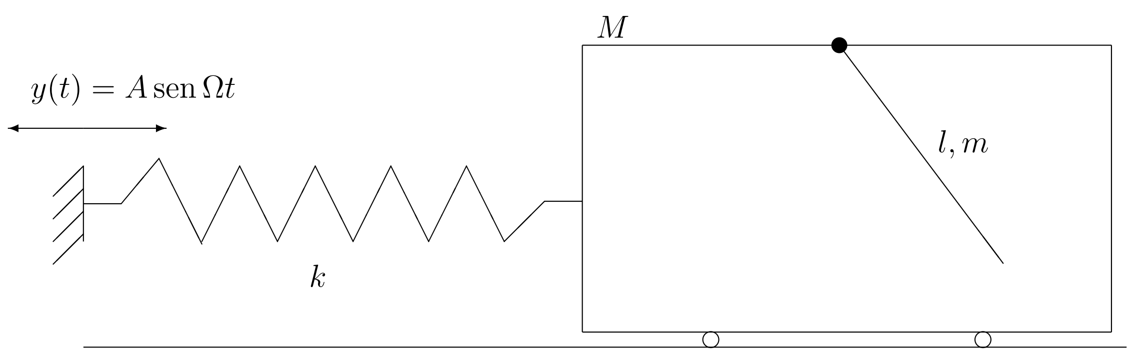
Ejercicio 4.º (2.º P. y Final) Tiempo: 60 min.

Un carretón de masa M puede moverse horizontalmente, estando unido por un resorte lineal de constante k a una base móvil, con movimiento horizontal impuesto según la ley $y(t) = A \operatorname{sen} \Omega t$. El carretón lleva suspendida una varilla homogénea de masa m y longitud l, que puede oscilar libremente alrededor de uno de sus extremos en el plano vertical. Se pide:

a. Ecuaciones del movimiento. Discutir la existencia de integrales primeras.

b. Calcular la fuerza de excitación necesaria en la base del muelle para imponer el movimiento dado.

c. En el supuesto de pequeñas oscilaciones, y considerando que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, obtener el movimiento cuando se alcance el régimen permanente.



El sistema posee dos grados de libertad, que describiremos mediante las coordenadas generalizadas x (elongación del muelle desde su posición natural) y φ (ángulo de la varilla con la vertical).

1. Las expresiones de energía cinética y potencial son:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}+\dot{y})^2 + \left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + (\dot{x}+\dot{y})l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] \\ V &= -mg\frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

donde $y(t)$ es la excitación impuesta a la base, definida por

$$y = A \operatorname{sen} \Omega t$$

La Lagrangiana es

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}(M+m)(\dot{x} + A\Omega\cos\Omega t)^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}(\dot{x} + A\Omega\cos\Omega t)^2\cos\varphi + mg\frac{l}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange,

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi + kx &= (M+m)A\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t \\ \frac{1}{2}ml\ddot{x}\cos\varphi + \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi &= \frac{1}{2}mlA\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t\cos\varphi \end{aligned}$$

No existen integrales primeras directas, ya que no hay coordenadas cíclicas y la Lagrangiana depende explícitamente del tiempo.

2. La fuerza necesaria es el producto de la constante del muelle, k, por su elongación, $x(t)$:

$$\begin{aligned} F &= kx \\ &= (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi - (M+m)A\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t \end{aligned}$$

3. La linealización se realiza considerando los valores de $(x,\, \varphi,\, \dot{x},\, \dot{\varphi})$ pequeños, y despreciando términos de orden cuadrático o superior. Resulta:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi} + kx &= (M+m)A\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t \\ \frac{1}{2}ml\ddot{x} + \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + mg\frac{l}{2}\varphi &= \frac{1}{2}mlA\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t \end{aligned}$$

La solución de régimen permanente, supuesto un pequeño amortiguamiento inevitable, es de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ \varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} \operatorname{sen}\Omega t \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{array} \right\} = -\Omega^2 \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} \operatorname{sen}\Omega t$$

Sustituyendo en el sistema linealizado y despejando se obtienen A y B:

$$\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} = (\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})^{-1} \left\{ \begin{array}{c} (M+m)A\Omega^2 \\ \frac{1}{2}mlA\Omega^2 \end{array} \right\}$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\frac{l}{2} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M+m & \frac{1}{2}ml \\ \frac{1}{2}ml & \frac{1}{3}ml^2 \end{pmatrix}.$$