Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (1er. Parcial y Final) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar los teoremas generales de la dinámica de sistemas referidos al sistema del centro de masa. (2.5 ptos.)

Demostrar porqué, en un sólido rígido, las proyecciones de las velocidades de 2 puntos cualesquiera A y B sobre la recta que los une son iguales. (2.5 ptos.)

Para un sistema lineal definido por $m\ddot{x} + kx = q \operatorname{sen} \Omega t$, *obtener* el movimiento de régimen permanente para los dos conjuntos de condiciones iniciales siguientes: 1. $(x_0 = \dot{x}_0 = 0)$; 2. $(x_0 = a,\ \dot{x}_0 = 0)$. (*Nota:* se debe suponer que, aunque no se considere, existe un pequeño amortiguamiento inevitable, que permite llegar a dicho régimen permanente) (2.5 ptos.)

Demostrar porqué, en un sistema cuya función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$ no incluya *explícitamente* el tiempo, la expresión $(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L)$ se mantiene constante. (2.5 ptos.)

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (2.º Parcial y Final) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Para un cable flexible y homogéneo, sometido a su propio peso, *deducir* las expresiones de la tensión horizontal y vertical en un punto dado. (2.5 ptos.)

Enunciar el principio de Hamilton para un sistema conservativo. ¿Qué relación guarda con las ecuaciones de Lagrange? (2.5 ptos.)

Para un sólido con un punto fijo, *deducir* la expresión vectorial de las ecuaciones de la dinámica (ecs. de Euler), empleando para ello un triedro que siga al cuerpo salvo en su movimiento de rotación propia (triedro intermedio), en los casos en que este triedro resulte conveniente. (2.5 ptos.)

Para un sistema lineal con n g.d.l. de ecuación $[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{f(t)\}$, *definir* las coordenadas normales y expresar las ecuaciones de la dinámica en ellas. (2.5 ptos.)

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Borrador

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (1er. Parcial y Final) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar los teoremas generales de la dinámica de sistemas referidos al sistema del centro de masa. (2.5 ptos.)

Suponemos un sistema general de N partículas, con coordenadas $\boldsymbol{r}_i$ en el sistema inercial de referencia, y $\boldsymbol{\rho}_i$ en el sistema del centro de masa (SCM). Identificamos las magnitudes cinéticas del sistema, relativas al SCM (es decir, empleando posiciones y velocidades relativas), mediante $\boldsymbol{H}_G^{SCM}$ (momento cinético respecto del centro de masas G), T^{SCM} (energía cinética), y $\boldsymbol{\Phi}^{SCM}$ (cantidad de movimiento). $\boldsymbol{M}_G$ es la suma de momentos en G. Aunque el SCM no es inercial ($\boldsymbol{a}_G \neq \boldsymbol{0}$), sí se verifican los teoremas del momento cinético (para el punto G) y de la energía; El de la cantidad de movimiento queda reducido a una igualdad trivial:

Th. de la cantidad de Movimiento: $\boldsymbol{\Phi}^{SCM} = \boldsymbol{0}$ (igualdad trivial)

Th. del Momento Cinético: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G^{SCM} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{M}_G$

Th. de la Energía Cinética: $\mathrm{d}T^{SCM} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_i = \mathrm{d}W^{SCM}$

Demostrar porqué, en un sólido rígido, las proyecciones de las velocidades de 2 puntos cualesquiera A y B sobre la recta que los une son iguales. (2.5 ptos.)

El campo de velocidades del sólido rígido es

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho};$$

tomando como origen un punto A, la velocidad de otro punto B cualquiera es por tanto

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AB},$$

Expresión que proyectada sobre $\boldsymbol{AB}$ arroja

$$\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{AB} + \underbrace{(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AB}) \cdot \boldsymbol{AB}}_{=\boldsymbol{0}},$$

c.q.d.

Para un sistema lineal definido por $m\ddot{x} + kx = q \operatorname{sen} \Omega t$, *obtener* el movimiento de régimen permanente para los dos conjuntos de condiciones iniciales siguientes: 1. ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$); 2. ($x_0 = a,\ \dot{x}_0 = 0$). (*Nota:* se debe suponer que, aunque no se considere, existe un pequeño amortiguamiento inevitable, que permite llegar a dicho régimen permanente) (2.5 ptos.)

La solución de régimen es armónica, de la misma frecuencia que la excitación, y sin desfase apreciable al ser despreciable el amortiguamiento. Tommamos pues $x = A \operatorname{sen} \Omega t$, y sustituimos en la ecuación para obtener el valor de A:

$$-m\Omega^2 A \operatorname{sen} \Omega t + kA \operatorname{sen} \Omega t = q \operatorname{sen} \Omega t;$$

despejando,

$$A = \frac{q}{k - m\Omega^2}.$$

Se observa que no depende de las condiciones iniciales, por lo que la solución de régimen es la misma en ambos casos (las condiciones iniciales sólo influyen en el régimen transitorio, que aquí no se considera, determinando las dos constantes de la solución de la ec. homogénea).

Demostrar porqué, en un sistema cuya función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$ no incluya *explícitamente* el tiempo, la expresión ($\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$) se mantiene constante. (2.5 ptos.)

Derivamos en un caso general $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ respecto a t:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

considerando $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ (ecuación de Lagrange en q_i) y despejando,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right). \end{aligned}$$

Si L no depende explícitamente de t, $\partial L/\partial t = 0$, y la expresión dada (integral de Jacobi) se mantiene constante.

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (2.º Parcial y Final) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear la hoja adicional que se les repartirá como borrador, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Para un cable flexible y homogéneo, sometido a su propio peso, *deducir* las expresiones de la tensión horizontal y vertical en un punto dado. (2.5 ptos.)

Partimos de la ecuación vectorial del equilibrio,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0},$$

donde $\boldsymbol{T}$ es la tensión del cable y $\boldsymbol{f} = -q\boldsymbol{k}$ la fuerza repartida por unidad de longitud (en este caso el peso). Proyectando sobre las direcciones horizontal y vertical, e integrando se obtienen directamente las relaciones pedidas:

$$\mathrm{d}T_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_x = T_0 = qa = \text{cte.}}$$

$$\mathrm{d}T_z = q\,\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_z = qs}$$

En esta última expresión, al integrar se ha tomado como origen para medir el arco s el vértice de la catenaria, punto de tangente horizontal en que $T_z = 0$. a es un parámetro constante de la catenaria con dimensiones de longitud.

Enunciar el principio de Hamilton para un sistema conservativo. ¿Qué relación guarda con las ecuaciones de Lagrange? (2.5 ptos.)

Un sistema mecánico, con función Lagrangiana $L(q_1, \dot{q}_i, t) = T - V$, evoluciona entre dos instantes t_1 y t_2 de forma que la integral curvilínea

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t$$

toma un valor estacionario (extremal) para la trayectoria real $q_i(t)$.

El principio de Hamilton es equivalente a las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad \forall t \in [t_1, t_2],$$

que no son sino las ecuaciones de Euler correspondientes al principio variacional de Hamilton.

Para un sólido con un punto fijo, *deducir* la expresión vectorial de las ecuaciones de la dinámica (ecs. de Euler), empleando para ello un triedro que siga al cuerpo salvo en su movimiento de rotación propia (triedro intermedio), en los casos en que este triedro resulte conveniente. (2.5 ptos.)

La expresión más general de la ecuación dinámica del sólido con un punto fijo, derivando a través de un triedro móvil, es

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})\right)_{rel} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

El primer sumando es la derivada relativa, mientras que el segundo corresponde al término complementario de derivación por la velocidad instantánea de rotación del triedro móvil respecto al inercial, $\boldsymbol{\omega}$. $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sólido, que sólo coincidirá con $\boldsymbol{\omega}$ cuando el triedro móvil sea el propio triedro del sólido. En el caso del triedro intermedio, tomando con la notación usual $\boldsymbol{k}$ como el eje de la rotación propia φ, es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$.

El empleo del triedro intermedio sólo resulta conveniente para sólidos de revolución ($\boldsymbol{k} \equiv$ eje revolución), en los que $\boldsymbol{I}_O$ se mantiene constante en relación con el triedro intermedio (en otro caso $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O/\mathrm{d}t \neq \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}$, siendo necesario incluir la derivada del tensor de inercia, lo que complica la expresión considerablemente). La expresión vectorial resulta pues en este caso

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{rel} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}) \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})}.$$

Para un sistema lineal con n g.d.l. de ecuación $[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{f(t)\}$, *definir* las coordenadas normales y expresar las ecuaciones de la dinámica en ellas. (2.5 ptos.)

Sean ω_α, $\{a\}_\alpha$ las frecuencias propias y modos de vibración correspondientes, normalizados respecto de la matriz de masas de la manera usual ($||a||_\alpha[M]\{a\}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$). Definimos como "matriz modal" la constituida por los vectores propios como filas:

$$[a] = \begin{pmatrix} ||a||_1 \\ ||a||_2 \\ \vdots \\ ||a||_n \end{pmatrix} \equiv ({a^i}_j)$$

Las coordenadas normales se definen, en función de las coordenadas generales $\{q\}$, mediante la expresión

$$\{q\} = [a]^T\{u\} \quad \Rightarrow \quad \{u\} = [a]^{-T}\{q\}.$$

Sustituyendo en la ecuación matricial, y premultiplicando los dos miembros de la misma por $[a]$,

$$[a][M][a]^T\{\ddot{u}\} + [a][K][a]^T\{u\} = [a]\{f(t)\}.$$

Considerando las propiedades de los modos normales de vibración, resulta $[a][M][a]^T = [1]$ (matriz unidad) y $[a][K][a]^T = [\Omega^2]$ (matriz diagonal formada por los cuadrados de las ω_α). Así, resulta un conjunto de n ecuaciones desacopladas gobernando la amplitud de cada modo de vibración:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = {a^i}_j f_j(t), \qquad (i = 1, \dots n).$$