Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (17 de Septiembre de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar el principio de la energía cinética para un sistema general de n partículas. ¿En qué caso se anula el trabajo de las fuerzas interiores? (*justificar* la respuesta) (2.5 ptos.)

Sea $T = \sum_i \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2$ la energía cinética; $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{ext} + \boldsymbol{F}_i^{int}$ las fuerzas sobre cada partícula. En un incremento infinitesimal de tiempo ($\mathrm{d}t$), en que las coordenadas pasan de $\boldsymbol{r}_i$ a $(\boldsymbol{r}_i + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i)$, se verifica:

$$\mathrm{d}T = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{F}_i^{ext} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}_{\mathrm{d}W^{ext}} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{F}_i^{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}_{\mathrm{d}W^{int}} .$$

Será $\mathrm{d}W^{int} = 0$ en el caso en que o bien no existan fuerzas interiores, o bien siendo $\boldsymbol{F}^{int} \neq 0$, cuando las distancias entre las partículas sean constantes (sólido rígido). En efecto, entre cada par de partículas i, j existen fuerzas internas $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ por el principio de la acción y reacción, que además podemos suponer llevan la dirección de $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$. si $|\boldsymbol{r}_{ij}| = \text{cte.}$, entonces $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_{ij} = 0$. Así, el trabajo de cada pareja de fuerzas internas es nulo:

$$\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i - \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j) = 0$$

Sea un sistema binario gravitatorio aislado. *Obtener* la ecuación diferencial del movimiento relativo de una de las masas respecto de la otra. (2.5 ptos.)

Sean las dos masas m_1 y m_2, con posiciones definidas por $\boldsymbol{r}_1, \ \boldsymbol{r}_2$. Se define $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, posición de m_2 relativa a m_1. Las ecuaciones dinámicas de cada masa debido a la fuerza de atracción gravitatoria son

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= -\frac{Gm_1}{r^3}\boldsymbol{r} \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \frac{Gm_2}{r^3}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

restando la segunda ecuación de la primera,

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Esta ecuación define el movimiento de m_2 relativo a m_1 como si estuviese atraída por una *masa equivalente* fija de valor $m_1 + m_2$.

En el movimiento plano de un sólido, *obtener* la expresión de la aceleración de un punto cualquiera, conocida su posición instantánea $\boldsymbol{r}$, la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}(t)$ y la posición del centro instantáneo de rotación $\boldsymbol{r}_I(t)$. Expresar el resultado únicamente en función de las magnitudes dadas y de sus derivadas, para aquellas de las que se conozca su evolución temporal. (2.5 ptos.)

La velocidad de un punto cualquiera del sólido ($\boldsymbol{r}$) corresponde a una rotación alrededor del C.I.R. ($\boldsymbol{r}_I$):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I).$$

Derivando esta expresión respecto del tiempo,

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}_I).$$

Ahora bien, $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ es la velocidad del punto del sólido, mientras que $\dot{\boldsymbol{r}}_I$ es la velocidad del punto geométrico que define el C.I.R. (velocidad de sucesión, distinta de la velocidad que llevaría el punto correspondiente del sólido, que es nula). Así,

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I) + \boldsymbol{\Omega} \wedge [\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I) - \dot{\boldsymbol{r}}_I].$$

Denominando $\mathbf{d} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I)$, resulta finalmente

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d} - \Omega^2 \mathbf{d} - \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_I.$$

Del movimiento de un sólido se sabe que su axoide fijo es una superficie cilíndrica. ¿Qué se puede decir del axoide móvil?
a)necesariamente será una superficie cónica; b) necesariamente será una superficie reglada de generatrices paralelas; c) podrá ser una superficie cónica o cilíndrica según las condiciones iniciales; d) no se puede afirmar nada de lo anterior por no tener suficiente información. (*justificar* la respuesta) (2.5 ptos.)

El axoide fijo es necesariamente un cilindro, o un plano en el caso límite, es decir la respuesta b).

En efecto, al ser el axoide fijo cilíndrico, el eje del movimiento helicoidal, cuya dirección es la de $\boldsymbol{\Omega}$, se traslada sin cambiar de dirección, por lo que $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ha de ser paralela a $\boldsymbol{\Omega}$, es decir, $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$. Se sabe que la derivada $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ es igual en la referencia fija y en la móvil (el término complementario es precisamente $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$), por lo que en la referencia móvil la superficie reglada que define el axoide móvil será también de generatrices paralelas, es decir, un cilindro.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (17 de Septiembre de 1993)

Borrador