Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de Enero de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Expresar las condiciones para la existencia y estabilidad del equilibrio en un sistema mecánico general en el que las fuerzas provienen de un potencial $V(q_j)$, siendo q_j las coordenadas generalizadas del sistema. (2.5 ptos.)

Equilibrio

Existirá equilibrio en un punto $(q_j)_0$ si en ese punto V toma un valor extremal,

$$\left(Q^j\right)_0 = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0 = 0.$$

Estabilidad

Para que el equilibrio sea estable, debe existir un mínimo local del potencial V en ese punto. Para ello, la matriz

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0\right]$$

debe ser definida positiva (todos los menores principales > 0).

Discutir en qué casos la función Hamiltoniana $H(q_j, p^j, t)$ de un sistema se conserva en el movimiento, y en qué casos coincide con la energía total $T+V$. (2.5 ptos.)

Se sabe que

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(q_j, p^j, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial t},$$

luego H se conservará siempre y cuando el tiempo t no figure expresamente en H ni por tanto en la Lagrangiana L.

Independientemente de lo anterior, será $H = T + V$ si la expresión de T es cuadrática homogénea en $\dot{q}_j$, lo que ocurre si no se emplean referencias móviles en la definición de las q_j. En caso de que coincida, podrá o no conservarse, según la condición arriba expuesta.

Para un sólido rígido de revolución, con un punto de su eje fijo y sometido únicamente a su propio peso, *expresar* las magnitudes cinéticas que se conservan en el movimiento. (2.5 ptos.)

Emplearemos la notación usual del triedro del cuerpo $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, triedro fijo $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$, ángulos de Euler (ψ, θ, φ) y momentos principales de inercia (A, A, C). El momento respecto del punto fijo O perteneciente al eje es $\boldsymbol{M}_O = Mg\mathrm{d}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{K}$. Se conservan:

1. Momento cinético proyectado sobre el eje vertical,

$$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\theta + Cr\cos\theta \quad (= \text{cte.})$$

2. Momento cinético proyectado sobre el eje del cuerpo,

$$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = Cr = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \quad (= \text{cte.})$$

3. Energía total (al ser la fuerza de gravedad conservativa),

$$E = T + V = \frac{1}{2}(A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + Cr^2) + Mg\mathrm{d}\cos\theta \quad (= \text{cte.})$$

Definir los modos normales de vibración para un sistema lineal con n grados de libertad $(q_j,\ j = 1, \dots n)$ y sin amortiguamiento, expresando el movimiento del sistema $q_j(t)$ en función de ellos. (2.5 ptos.)

En oscilaciones libres, el sistema se puede representar por la ecuación diferencial matricial de la dinámica:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Los modos normales de vibración son configuraciones que, sometidas a vibración libre, mantienen su forma, vibrando entonces el sistema como una forma modal constante afectada de una función armónica del tiempo:

$$\{\mathbf{x}(t)\} = \{\mathbf{a}\}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi).$$

Sustituyendo en la ecuación dinámica, se comprueba que los modos son la solución del problema de autovalores:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Existen n posibles modos solución $\{\mathbf{a}\}_i$, con sus frecuencias propias ω_i correspondientes. Si no existen soluciones múltiples, las frecuencias propias son distintas y los modos correspondientes son *normales* respecto de la matriz de masas: para $i \neq j$, $\{\mathbf{a}\}_i^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_j = 0$. El movimiento general se expresará como combinación de los n modos:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{a}\}_1\xi_1(t) + \{\mathbf{a}\}_2\xi_2(t) + \ldots + \{\mathbf{a}\}_n\xi_2(t)$$

donde $\xi_i(t)$ son las llamadas coordenadas normales, que dependen del tiempo como funciones armónicas, con la frecuencia propia ω_i de cada modo de vibración.