Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

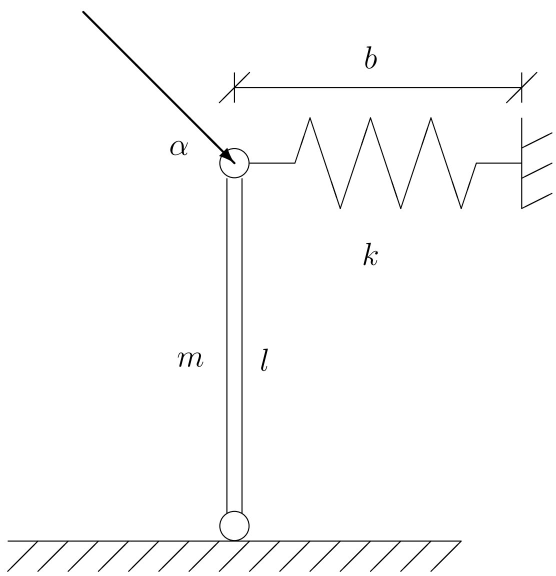
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de Enero de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 45 min.

Una barra rígida de masa m y longitud l, se halla en equilibrio en posición vertical, estando su extremo inferior sujeto a una articulación que permite un movimiento de rotación en el plano vertical. Su extremo superior está ligado a un resorte horizontal de constante k situado en el mismo plano. Sobre dicho extremo superior actúa una carga constante P de inclinación α, tal como se aprecia en la figura. Se puede considerar que el peso propio es despreciable frente a la carga P.

Obtener la condición para la estabilidad del equilibrio.



SOLUCIÓN

Tomamos para describir el movimiento el ángulo φ, incliación de la barra respecto de la vertical. Para expresar el potencial, tendremos en cuenta que el muelle en la posición de equilibrio vertical tendrá un alargamiento Δ_0 desde su posición natural (sin carga). Respecto de la posición de equilibrio, el alargamiento viene dado por Δ:

$$\Delta = \sqrt{(b + l \operatorname{sen} \varphi)^2 + l^2(1 - \cos \varphi)^2} - b$$

Si tenemos en cuenta que φ es pequeño, despreciando los términos de orden $O(\varphi^2)$ y superior resulta

$$\Delta = l\varphi + O(\varphi^2)$$

La expresión del potencial, teniendo en cuenta también el potencial de la carga externa P, es:

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta_0 + l\varphi)^2 - \underbrace{P \operatorname{sen}\alpha}_{P_y} \quad l\,\underbrace{(1-\cos\varphi)}_{\approx\varphi^2/2} - \underbrace{P\cos\alpha}_{P_x}\, l\,\underbrace{\operatorname{sen}\varphi}_{\approx\varphi}$$

y con la aproximación realizada

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta_0 + l\varphi)^2 - P\operatorname{sen}\alpha\; l\frac{\varphi^2}{2} - P\cos\alpha\; l\varphi$$

El equilibrio corresponde a:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = k\; l(\Delta_0 + l\varphi) - Pl\operatorname{sen}\alpha\;\varphi - Pl\cos\alpha = 0;$$

Sustituyendo $\varphi = 0$ resulta

$$k\; l\Delta_0 = Pl\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta_0 = \frac{P\cos\alpha}{k}$$

la estabilidad corresponde a:

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2} = k\; l^2 - Pl\operatorname{sen}\alpha > 0$$

es decir:

$$\boxed{k > \frac{P\operatorname{sen}\alpha}{l}}$$