Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (28 de Enero de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 45 min.

Un oscilador lineal está formado por una masa $m = 10\,\mathrm{kg}$, con un resorte elástico de constante $k = 10000\,\mathrm{N/m}$. Para determinar el coeficiente de amortiguamiento viscoso c, se sabe que sometido a vibraciones libres, el movimiento reduce su amplitud a la mitad al cabo de 100 s. Estando el sistema en reposo, comienza a actuar de manera súbita una fuerza constante de valor $F = 1000\,N$, manteniéndose esta carga a lo largo del tiempo. Se pide:

a. Calcular el valor de c.

b. Ecuación del movimiento para el régimen transitorio con el valor de c calculado antes.

c. Ecuación del movimiento para el régimen permanente (transcurrido suficiente tiempo).

d. Suponiendo que el valor de c es muy pequeño, y se puede por tanto despreciar a efecto del régimen transitorio, obtener la máxima elongación de este movimiento respecto a la posición inicial, y calcular el factor de amplificación.

(Se llama factor de amplificación al cociente entre la máxima elongación del movimiento para la carga dinámica y la que produciría en el resorte una carga estática, impuesta de forma suficientemente lenta para que no se produzcan vibraciones)

El movimiento para vibraciones libres es

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{c}{2m}t}}_{\text{amplitud}}\ \mathrm{sen}(\omega t + \phi_0).$$

Imponiendo que la amplitud se reduzca a la mitad en 100 s,

$$Ae^{-\frac{c}{2m}100} = \frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{\ln 2}{5} = 0{,}13863\,\mathrm{N/(m/s)}.}$$

En el régimen transitorio es preciso considerar la solución de la ecuación completa:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) + \frac{F}{k},$$

siendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = 31{,}623\,\mathrm{rad/s}.$$

Calculamos el valor de A y ϕ_0 mediante las condiciones iniciales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= A\,\mathrm{sen}\,\phi_0 + 0{,}1 \\ 0 = \dot{x}(0) &= A\left(-\frac{c}{2m}\right)\mathrm{sen}\,\phi_0 + A\omega\cos\phi_0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\tan\phi_0 = \frac{\omega}{c/2m} = 4562{,}2 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \begin{cases} 89{,}987^\circ = 0{,}4999302\pi\,\mathrm{rad} \\ 89{,}987^\circ + 180^\circ = 1{,}4999302\pi\,\mathrm{rad} \end{cases}$$

Tomaremos la segunda solución de ϕ_0 para que el valor de A salga positivo:

$$A = \frac{-0{,}1}{\operatorname{sen}\phi_0} = 0{,}100000002 \approx 0{,}1$$

(la pequeñísima diferencia respecto del valor $A = 0{,}1$ se debe al pequeño amortiguamiento existente). La ecuación del movimiento es por tanto

$$\boxed{x(t) = 0{,}1\,e^{-0{,}006931\,t}\operatorname{sen}(31{,}623\,t + 1{,}4999302\pi) + 0{,}1}$$

El régimen permanente correspondiente a la fuerza constante F es un desplazamiento constante de valor

$$\boxed{x = \frac{F}{k} = 0{,}1\,\mathrm{m}}$$

Si $c = 0$, la máxima elongación es $0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2\,\mathrm{m}$; la elongación estática es $0{,}1\,\mathrm{m}$; por tanto, el factor de amplificación vale

$$\boxed{\text{f.a.} = \frac{0{,}2}{0{,}1} = 2,}$$

lo que quiere decir que si se aplica la carga de golpe el desplazamiento del resorte es es doble que si se aplica de manera estática.