Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

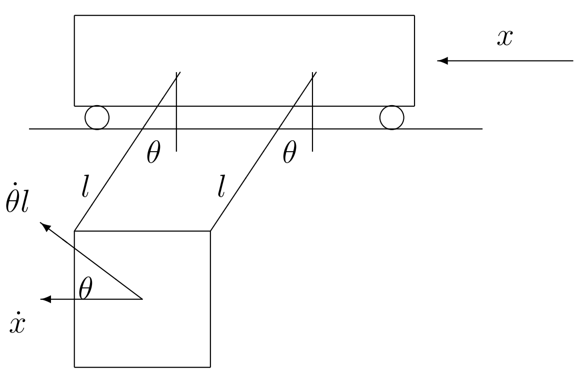
1er EXAMEN PARCIAL (28 de Enero de 1994)

Apellidos *Nombre* Nº *Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 45 min.

Una placa cuadrada $ABCD$, de masa m, está colgada de un carretón de masa M, mediante dos varillas inextensibles de masa despreciable y longitud l, articuladas en sus extremos (ver figura). La placa sólo puede moverse en su plano y el carretón puede desplazarse en el mismo plano sobre la recta horizontal en que se apoya, sin rozamiento y con un amortiguador viscoso de constante c. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento. ¿Existen Integrales Primeras?
2. En el caso particular en que $c = 0$, si la placa se suelta estando el sistema en reposo con las varillas horizontales, calcular:
   a) Desplazamiento del carretón cuando la placa llega al punto más bajo de su trayectoria.
   b) Velocidad del carretón en dicho instante.



1. Como existen fuerzas no conservativas (el amortiguamiento viscoso), la función Lagrangiana a calcular es una "Lagrangiana parcial".

   Las expresiones de la energía cinética y de la energía potencial son:

$$T = \frac{1}{2}\, M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + 2l\, \dot{x}\, \dot{\theta}\, \cos\theta + \dot{\theta}^2\, l^2)$$

$$V = -m\, g\, l \cos\theta$$

   con lo que la función Lagrangiana resulta

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\, (\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2\, l^2 + 2l\, \dot{x}\, \dot{\theta}\, \cos\theta) + m\, g\, l \cos\theta$$

Las Ecuaciones de Lagrange se obtienen con:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x \qquad (1) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta \qquad (2) \end{aligned}$$

Las fuerzas generalizadas se obtienen aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\delta W = -c\dot{x}\delta x \quad \Rightarrow \qquad Q_x = -c\dot{x}, \quad Q_\theta = 0$$

Sustituyendo en (1),(2) y operando, las ecuaciones del movimiento resultan:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\,\ddot{\theta}\,\cos\theta - ml\,\dot{\theta}^2\,\operatorname{sen}\theta &= -c\,\dot{x} \\ ml^2\,\ddot{\theta} + ml\,\ddot{x}\,\cos\theta + m\,g\,l\,\operatorname{sen}\theta &= 0 \end{aligned}$$

No existen integrales primeras:

- La energía total no es constante ya que existen fuerzas no conservativas.
- No tiene sentido hablar de la integral de Jacobi pues la evolución del sistema no viene caracterizada por una función lagrangiana (L es una función "Lagrangiana Parcial").
- No existen coordenadas cíclicas ya que a pesar de ser $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, al existir $Q_x \neq 0$ se cumple que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = Q_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \neq \mathrm{Cte}$$

2. En este caso ($c = 0$) todas las fuerzas son conservativas, existiendo dos integrales primeras:

- Conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2\,l^2 + 2l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos\theta) - m\,g\,l\,\cos\theta = C_1 \qquad (3)$$

- La correspondiente a la coordenada cíclica x

$$(M+m)\dot{x} + ml\,\dot{\theta}\,\cos\theta = C_2 \qquad (4)$$

a) En el instante inicial $\dot{x}_0 = \dot{\theta}_0 = 0, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$; con lo cual $C_1 = C_2 = 0$
Operando en (4):

$$(M+m)\dot{x} + ml\,\dot{\theta}\,\cos\theta = 0 \Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{ml\,\cos\theta}{M+m}\dot{\theta}$$

e integrando esta expresión entre $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ y $\theta = 0$, se obtiene el desplazamiento del carretón:

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 -\frac{ml\,\cos\theta}{M+m}\mathrm{d}\theta = \frac{ml}{M+m}$$

b) Particularizando para $\theta = 0$ la ecuación (4):

$$\dot{\theta} = -\frac{M+m}{ml}\dot{x}$$

Sustituyendo en [3] y despejando $\dot{x}$, se obtiene la velocidad del carretón:

$$\dot{x}^2 = \frac{2m^2gl}{mM + M^2}$$