Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (30 de Mayo de 1994)

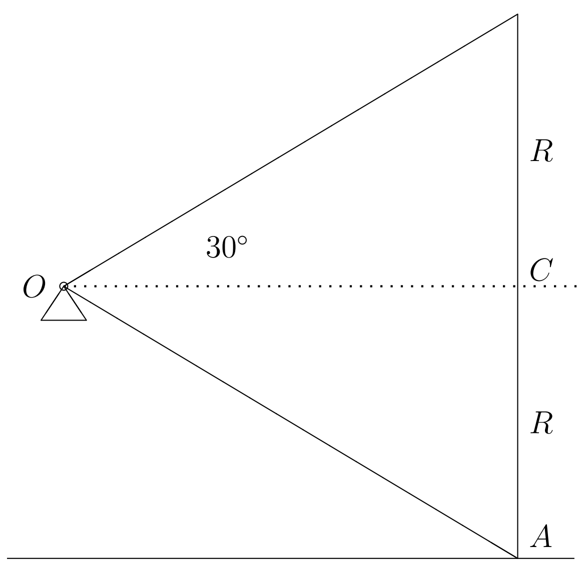
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 50 min.

Un cono de masa M, radio R en la base, y semiángulo en el vértice 30° se mueve de forma que su base rueda sin deslizar apoyada sobre un plano horizontal, y el vértice O está fijo a una altura R sobre el plano, de forma que el eje OC del cono se mantiene horizontal. En el movimiento el eje OC gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω. Se pide:

a. expresión del momento cinético del cono respecto del vértice O en los ejes principales de inercia;

b. velocidad ω necesaria para que la reacción en el vértice O sea nula.



Precisiones al enunciado: falta decir que el plano horizontal es liso, y en el punto b. la condición se debe referir a la anulación de la reacción vertical en el punto O.

Los momentos de inercia principales del cono respecto de O son

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{10}MR^2 \quad \text{(respecto del eje } OC\text{)} \\ A &= \frac{39}{20}MR^2 \quad \text{(respecto de ejes perpendiculares)} \end{aligned}$$

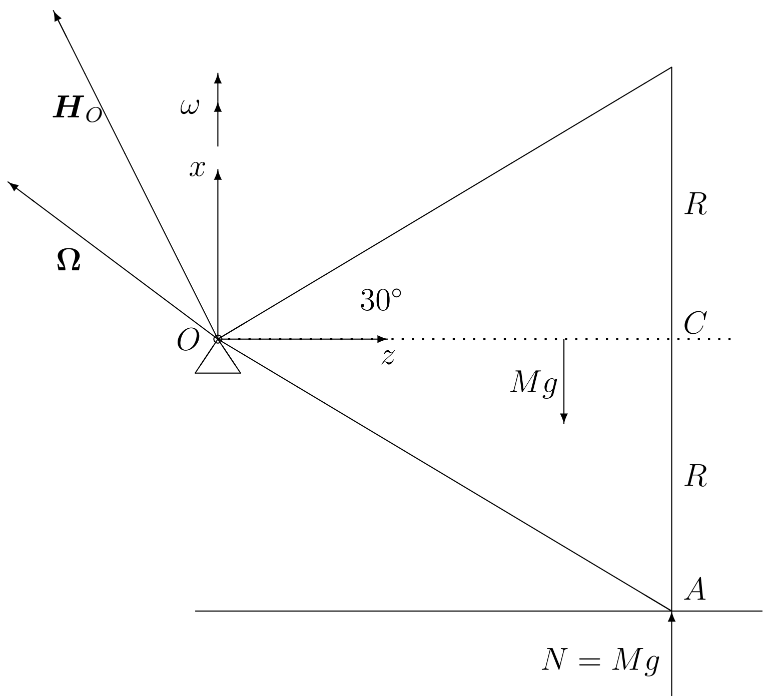
Se toma el eje Oz según OC, Ox vertical ascendente, y Oy horizontal.

Puesto que la velocidad de A es nula (rodadura), la velocidad instantánea de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ lleva la dirección $\boldsymbol{AO}$. La componente x de $\boldsymbol{\Omega}$ es ω, según el dato del enunciado. La componente z es por tanto

$$\omega_z = -\omega\sqrt{3}$$

El momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_O = A\omega\boldsymbol{i} + C\omega_z\boldsymbol{k} = A\omega\boldsymbol{i} - C\omega\sqrt{3}\boldsymbol{k}$$



En el movimiento del cono, el vector $\boldsymbol{H}_O$ conserva el módulo y permanece en el plano vertical Oxz, describiendo un cono de eje vertical con velocidad $\omega\boldsymbol{i}$. Por tanto su derivada es

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \omega\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{H}_O = C\omega^2\sqrt{3}\boldsymbol{j}$$

Aplicaremos la ecuación del momento cinético en O. Para ello se debe considerar que la reacción en A, al ser liso el plano, es vertical. Cuando se anula la reacción vertical en O, su magnitud es igual al peso del cono, $Mg\boldsymbol{i}$. También da momento en O el peso del cono, aplicado en su C.D.M., situado a distancia $3H/4 = 3\sqrt{3}R/4$ de O.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} \\ -Mg\frac{3R\sqrt{3}}{4} + MgR\sqrt{3} &= C\omega^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

sustituyendo el valor de C resulta

$$\boxed{\omega^2 = \frac{5}{6}\frac{g}{R}}$$