Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (final y 1er. parcial) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Deducir, partiendo de la fórmula de derivación de vectores en sistemas de referencia móviles, la expresión general del campo de aceleraciones, y su particularización para el caso del sólido rígido. (2.5 ptos.)

La derivada (absoluta) de un vector $\boldsymbol{p}$, conocida la derivada relativa a un sistema de referencia móvil con velocidad de rotación instantánea $\boldsymbol{\Omega}$, es $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{p}$. Aplicando la fórmula al vector posición en una referencia móvil, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}$, resulta

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{rel}}_{\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{v}_{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$$

Derivando de nuevo,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t^2} + \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}\right] + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) + \\ &= \underbrace{\boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\boldsymbol{a}_{arr}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}}_{\boldsymbol{a}_{cor}} + \boldsymbol{a}_{rel}\end{aligned}$$

En el caso del sólido rígido es $\boldsymbol{v}_{rel} = \boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{0}$, quedando sólo la componente de arrastre:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}).$$

Enunciar el principio de D'Alembert para un sistema general de N partículas. ¿Qué relación guarda este principio con las ecuaciones de Lagrange? (2.5 ptos.)

Sea un sistema sometido a enlaces lisos. Para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces, $\{\delta\boldsymbol{r}_i\}$, se cumple

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0}$$

siendo $\boldsymbol{f}_i$ las fuerzas *activas* (tanto externas como internas). El principio de D'Alembert constituye una alternativa a los principios de Newton-Euler como base para el desarrollo de la dinámica. Si se expresa en función de unas coordenadas generalizadas libres $(q_j,\ i = 1, \dots n)$ que definan de manera unívoca la configuración $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$, y admitiendo que todos los enlaces sean holónomos, se obtienen como consecuencia las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{q}_j}\right) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q_j} = Q_j; \quad j = 1 \dots n$$

Deducir la ecuación reducida del movimiento de un sistema binario gravitatorio aislado, formado por dos masas M y m, respecto de su centro de masas G. (2.5 ptos.)

Definimos $\boldsymbol{r} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M$. La ecuación dinámica de cada partícula es

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{r}}_m &= -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \\ M\ddot{\boldsymbol{r}}_M &= +\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

dividiendo la primera por m, la segunda por M y restando,

$$\underbrace{\ddot{\boldsymbol{r}}_m - \ddot{\boldsymbol{r}}_M}_{=\ddot{\boldsymbol{r}}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\boldsymbol{r}$$

La posición (de m) relativa al centro de masas G es

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{r}_m - \frac{m\boldsymbol{r}_m + M\boldsymbol{r}_M}{m+M} = \frac{M\boldsymbol{r}}{m+M}$$

y eliminando $\boldsymbol{r}$ en favor de $\boldsymbol{\rho}$ en la ecuación anterior resulta finalmente

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -G\frac{M^3/(m+M)^2}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}}$$

ecuación que define el movimiento de m relativo a G. La ecuación para M se obtiene inmediatamente cambiando los papeles de m y M en la expresión anterior.

Demostrar que dos Lagrangianas que difieran entre sí en una derivada temporal de una función de coordenadas y tiempo $\left(L' - L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_j, t)\right)$ son equivalentes (2.5 ptos.)

La forma más sencilla de demostrar lo pedido es a partir del principio de Hamilton. Este afirma que la trayectoria dinámica de un sistema entre dos puntos dados $(q_{j(1)}, t_1)$ y $(q_{j(2)}, t_2)$ es la que hace que el funcional $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t$ tome un valor estacionario. El funcional S' correspondiente a la Lagrangiana $L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F$ es

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_j, t)\,\mathrm{d}t \\ &= S + \underbrace{\left[F(q_{j(2)}, t_2) - F(q_{j(1)}, t_1)\right]}_{\text{cte.}} \end{aligned}$$

Se deduce entonces que la condición de estacionareidad del nuevo funcional S' es la misma que la de S, al diferir ambos en una constante, por lo que ambas Lagrangianas definen la misma trayectoria dinámica y son por tanto equivalentes.

También se puede demostrar el mismo resultado partiendo de las ecuaciones de Lagrange, comprobando que el término adicional $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_j, t)$ no altera dichas ecuaciones (ver pág. 7.7 de los apuntes).