Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (final y 2.º parcial) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

En el movimiento por inercia de un sólido con un punto fijo, *explicar* el concepto de ejes permanentes de rotación y *obtener* la condición que deben cumplir.

Se trata de las direcciones de la velocidad de rotación para las que un sólido sin momentos aplicados pueda mantenerse girando alrededor de ellas, sin modificarse la dirección de la velocidad de rotación a lo largo del movimiento.

Si el eje es permanente, el momento de inercia I_e debe ser constante. Al conservarse la energía cinética T en el movimiento por inercia, el módulo de $\boldsymbol{\Omega}$ será también constante:

$$T = \frac{1}{2} I_e \Omega^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \text{cte.}$$

De la ecuación vectorial de Euler,

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{I}_O \cdot \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}}}_{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

se deduce entonces que $\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$ debe ser paralela a $\boldsymbol{\Omega}$. Por tanto, los ejes permanentes corresponden a direcciones principales de inercia de $\boldsymbol{I}_O$.

Para garantizar la estabilidad de estas direcciones, deben corresponder bien al mínimo o al máximo momento de inercia, siendo inestable la rotación correspondiente al momento de inercia intermedio.

Obtener el régimen permanente del movimiento para el sistema definido por la ecuación matricial $\mathsf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \mathsf{K}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\} \operatorname{sen} \alpha t$, suponiendo que existe un pequeño amortiguamiento inevitable. (2.5 ptos.)

El régimen permanente está definido por una solución particular de la ecuación completa, al amortiguarse la parte correspondiente a la solución de la homogénea. Sea ésta del tipo $\{\mathbf{q}\}^p = \{\mathbf{D}\} \operatorname{sen} \alpha t$; derivando y sustituyendo en la ecuación matricial,

$$(-\alpha^2 \mathsf{M}\{\mathbf{D}\} + \mathsf{K}\{\mathbf{D}\}) \operatorname{sen} \alpha t = \{\mathbf{F}\} \operatorname{sen} \alpha t$$

de donde se despeja inmediatamente el valor de $\{\mathbf{D}\}$,

$$\{\mathbf{D}\} = (-\alpha^2 \mathsf{M} + \mathsf{K})^{-1} \{\mathbf{F}\}.$$

Cuando α coincida con alguna frecuencia propia del sistema se producirá resonancia, no estando definida en este caso la inversa en la expresión matricial anterior.

Demostrar porqué el momento cinético de un sólido respecto de su centro de masas, $\boldsymbol{H}_G$, en movimiento de caída libre, es constante. (2.5 ptos.)

El momento de las fuerzas gravitatorias ($-g\boldsymbol{k}$) sobre el sólido $\mathcal{B}$ es nulo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_G &= \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G) \wedge (-g\boldsymbol{k}) \rho \, \mathrm{d}V \\
&= -\underbrace{\left(\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r} \rho \, \mathrm{d}V \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} M\boldsymbol{r}_G} \wedge g\boldsymbol{k} + \boldsymbol{r}_G \wedge g\boldsymbol{k} \underbrace{\left(\int_{\mathcal{B}} \rho \, \mathrm{d}V \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} M} \\
&= -M\boldsymbol{r}_G \wedge g\boldsymbol{k} + \boldsymbol{r}_G \wedge Mg\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación $\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{0}$ se llega a la conclusión pedida.

El movimiento en torno al centro de masas en caída libre, despreciando la resistencia del aire, es por tanto un movimiento por inercia o de Poinsot.

Demostrar porqué en un hilo flexible sometido a cargas continuas normales a su directriz la tensión del hilo se mantiene constante a lo largo del mismo. (2.5 ptos.)

Se parte de la ecuación vectorial del equilibrio:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

Al llevar $\boldsymbol{T}$ la dirección de la tangente $\boldsymbol{t}$, su derivada es, aplicando la fórmula de Frenet:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} + T\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} + T\frac{\boldsymbol{n}}{R}$$

Si $\boldsymbol{F}$ es normal al hilo, su componente según $\boldsymbol{t}$ es nula; por tanto, de las igualdades anteriores se deduce

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 0 \quad (T \text{ constante}).$$