Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

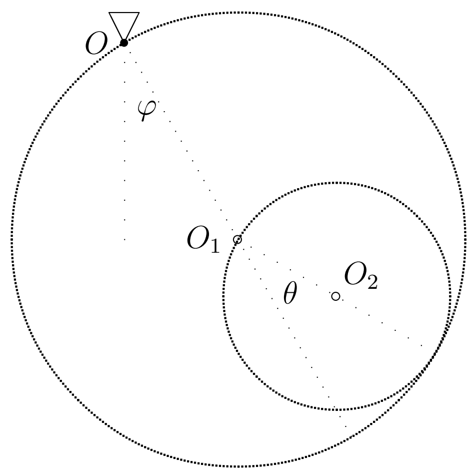
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º *(sólo 2.º parcial)* Tiempo: 45 min.

Un aro de masa m y radio $2a$ puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto de su perímetro que está fijo. A su vez, otro aro de masa m y radio a rueda sin deslizar dentro del primero. Se pide

a. Ecuaciones del movimiento

b. Para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, frecuencias propias y ecuaciones que permiten obtener los modos de vibración correspondientes.



Tomamos los parámetros φ (ángulo de OO_1 con la vertical) y θ (ángulo de OO_2 con OO_1). Sea ω_r la velocidad de rotación relativa del aro interior respecto del exterior; estableciendo la velocidad del punto O_2 como rodadura relativa al aro exterior,

$$\dot{\theta}a = -\omega_r a \quad \Rightarrow \quad \omega_r = -\dot{\theta}$$

La velocidad de rotación (absoluta) del aro interior será la suma

$$\omega = \dot{\varphi} + \omega_r = \dot{\varphi} - \dot{\theta}.$$

La obtención de la Lagrangiana es ahora inmediata:

$$\begin{aligned} L &= m4a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ma^2(\dot{\varphi}-\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\left[4a^2\dot{\varphi}^2 + a^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2 + 4a^2\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\theta\right] \\ &\quad + mg2a\cos\varphi + mg[2a\cos\varphi + a\cos(\varphi+\theta)] \\ &= ma^2\dot{\varphi}^2(7+2\cos\theta) + ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 4mga\cos\varphi + mga\cos(\varphi+\theta) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange resultantes son

$$\begin{aligned} 0 &= ma^2\ddot{\varphi}(14+4\cos\theta) - 4ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + 2ma^2\ddot{\theta}\cos\theta - 2ma^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta \\ &\quad + 4mga\operatorname{sen}\varphi + mga\operatorname{sen}(\varphi+\theta) \\ 0 &= 2ma^2\ddot{\theta} + 2ma^2\ddot{\varphi}\cos\theta + 2ma^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta + mga\operatorname{sen}(\varphi+\theta) \end{aligned}$$

Además de estas, existe una integral primera correspondiente a la conservación de la energía:

$$E = ma^2\dot{\varphi}^2(7 + 2\cos\theta) + ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - 4mga\cos\varphi - mga\cos(\varphi + \theta)$$

La posición de equilibrio estable corresponde a $\varphi = \theta = 0$; en las pequeñas oscilaciones supondremos pequeños tanto los parámetros como sus derivadas, obteniéndose así las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{aligned} 0 &= 18ma^2\ddot{\varphi} + 2ma^2\ddot{\theta} + 5mga\varphi + mga\theta \\ 0 &= 2ma^2\ddot{\varphi} + 2ma^2\ddot{\theta} + mga\varphi + mga\theta \end{aligned}$$

Si se considera una solución armónica de frecuencia angular ω, sustituyendo en la ecuación diferencial anterior, se obtiene la ecuación matricial homogénea siguiente

$$\left[-\omega^2 ma^2 \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + mga \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Para que exista solución no trivial, la ecuación característica es

$$m^2a^4 \begin{vmatrix} 5\dfrac{g}{a} - 18\omega^2 & \dfrac{g}{a} - 2\omega^2 \\ \dfrac{g}{a} - 2\omega^2 & \dfrac{g}{a} - 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

operando, se obtienen las dos raíces (frecuencias propias)

$$m^2a^4\left(\frac{g}{a} - 2\omega^2\right)\left(4\frac{g}{a} - 16\omega^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{g}{4a} \\ \omega_2^2 = \dfrac{g}{2a} \end{cases}$$

Sustituyendo las dos soluciones de ω en la ecuación (1) se obtienen los vectores propios resultantes. Para $\omega_1 = \sqrt{g/4a}$,

$$mga \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

De igual manera, para $\omega_2 = \sqrt{g/2a}$,

$$mga \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Normalizando los vectores propios respecto de la matriz de masas,

$$\{\mathbf{a}_1\} = \frac{\{\mathbf{u}\}}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|\mathbf{M}\{\mathbf{u}\}}} = \frac{1}{4a\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{a}_2\} = \frac{\{\mathbf{v}\}}{\sqrt{\|\mathbf{v}\|\mathbf{M}\{\mathbf{v}\}}} = \frac{1}{a\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Por último, con los vectores propios se obtiene la matriz modal

$$\mathsf{A} = \frac{1}{a\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

En el enunciado del problema del examen no se pedía calcular los vectores propios, bastaba con haber expresado la ecuación (1) para cada una de las frecuencias propias.