Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 2.º* *(sólo 1er. parcial)* Tiempo: 45 min.

Un sistema binario formado por dos partículas de masas $m_A$ y $m_B$ se mueve sin resistencias en un plano vertical fijo, atrayéndose las partículas entre sí con una fuerza proporcional a su distancia de constante $k$, actuando asimismo sobre ellas la gravedad terrestre. Empleando como coordenadas del sistema la posición de su centro de masas $G$, la distancia $s$ entre partículas, y el ángulo que forma el segmento $AB$ con la horizontal, se pide:

a. Lagrangiana del sistema;

b. Ecuaciones del movimiento e integrales primeras;

c. Reducir el movimiento relativo a $G$ a una ecuación diferencial en función de $s$ tan sólo.

---

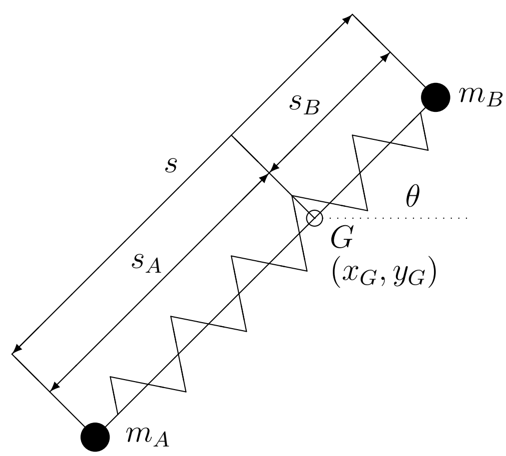


Figura 1: *Coordenadas generalizadas: $s$ distancia entre las masas, $\theta$ ángulo con la horizontal, $(x_G, y_G)$ coordenadas del centro de masa.*

la energía cinética se puede expresar mediante el teorema de Koenig:

$$T = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_A(\dot{s}_A^2 + s_A^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_B(\dot{s}_B^2 + s_B^2\dot{\theta}^2).$$

y teniendo en cuenta que

$$s_A = \frac{m_B}{m_A + m_B}s; \quad s_B = \frac{m_A}{m_A + m_B}s,$$

resulta

$$T = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_{eq}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2)$$

siendo $m_{eq} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$. En la expresión anterior el primer sumando corresponde a la energía cinética que tendría una partícula con la masa total moviéndose como el C.D.M, y el segundo al movimiento alrededor del C.D.M.

Restando la energía potencial, se obtiene la Lagrangiana

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_{eq}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) - (m_A + m_B)gy_G - \frac{1}{2}ks^2} \qquad (1)$$

$L$ no depende de $x_G$, siendo ésta por tanto cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = \text{(cte.)}$$

por lo que

$$\boxed{\dot{x}_G = V_{0x} \quad \text{(cte.)}} \qquad (2)$$

La ecuación de Lagrange en $y_G$ es

$$\boxed{(m_A + m_B)\ddot{y}_G - (m_A + m_B)g = 0} \qquad (3)$$

las ecuaciones (2) y (3) describen el movimiento parabólico del C.D.M. del sistema, como es bien conocido.

La coordenada $\theta$ también es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{(cte.)}$$

lo que desarrollado arroja

$$\boxed{s^2\dot{\theta} = C \quad \text{(cte.)}} \qquad (4)$$

ecuación cuyo significado físico corresponde a la conservación del momento cinético respecto de $G$, $H_G = m_{eq}s^2\dot{\theta}$.

Por último, la ecuación de Lagrange respecto a $s$ es

$$\boxed{m_{eq}\ddot{s} - m_{eq}s\dot{\theta}^2 + ks = 0} \qquad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) definen el movimiento alrededor del C.D.M., $G$. Eliminando $\dot{\theta}$ se puede expresar este movimiento mediante una única ecuación en función de $s$,

$$\boxed{m_{eq}\ddot{s} - m_{eq}\frac{C^2}{s^3} + ks = 0} \qquad (6)$$

Además, al ser todas las fuerzas conservativas, la energía total se conserva:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_{eq}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + (m_A + m_B)gy_G + \frac{1}{2}ks^2 \quad \text{(cte.)}} \qquad (7)$$

En esta última expresión, los términos 1.º y 3.º corresponden a la energía total ($E'$) del movimiento parabólico de la masa total con el movimiento de $G$:

$$E' = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + (m_A + m_B)gy_G$$

$E'$ también es constante, como se comprueba fácilmente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E' = (m_A + m_B)[\underbrace{\ddot{y}_G}_{-g}\dot{y}_G + g\dot{y}_G] = 0,$$

por lo que podemos simplificar (7) para obtener otra constante del movimiento,

$$E'' = E - E' = \frac{1}{2}m_{eq}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}ks^2 \quad \text{(cte.)} \tag{8}$$

Si eliminamos $\dot{\theta}$ de esta última expresión se obtiene

$$E'' = \frac{1}{2}m_{eq}(\dot{s}^2 + \frac{C^2}{s^2}) + \frac{1}{2}ks^2 \quad \text{(cte.)} \tag{9}$$

Es posible comprobar que derivando esta última expresión (9) se obtiene precisamente la ecuación (6), tratándose por tanto de una integral primera del movimiento relativo expresado por (6).