Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

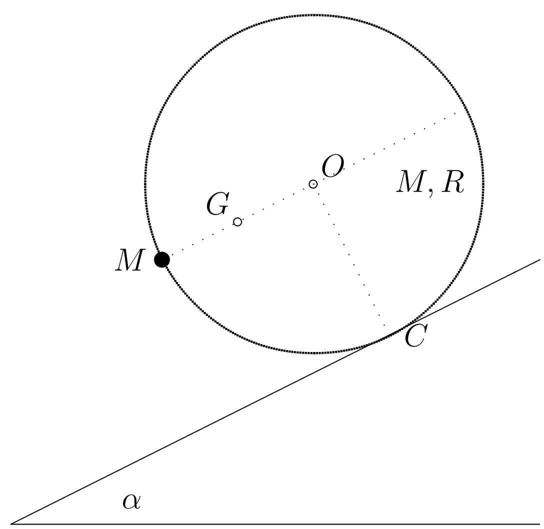
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (sólo 2.º parcial) Tiempo: 50 min.

Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta inclinada un ángulo α, dentro de un plano vertical. El disco lleva adherida una masa puntual de valor M en el borde, pudiéndose considerar que ésta no estorba la rodadura. El conjunto parte del reposo en la situación de la figura, en que la masa puntual está a una distancia R de la recta inclinada. Se pide

a. Ecuaciones del movimiento en ese instante;

b. Valor necesario del coeficiente de rozamiento μ para que no deslice.



El sistema, al no deslizar, posee un único grado de libertad, el ángulo θ girado por el sólido. El primer apartado se reduce a obtener la ecuación que expresa la aceleración angular $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ en el instante inicial.

Para calcular la aceleración angular plantearemos las ecuaciones del sólido a partir de los principios de la cantidad de movimiento y del momento cinético. En principio, *la ecuación del momento cinético no se puede aplicar directamente en el centro instantáneo de rotación C,* ya que este punto no es fijo a lo largo del movimiento, siendo necesario incluir en la ecuación un término complementario. En efecto, el punto de contacto C se traslada con el movimiento del disco, y su velocidad no es paralela a la de G, por lo que el término complementario en la ecuación $\mathrm{d}/\mathrm{d}t(\boldsymbol{H}_C) = \boldsymbol{M}_C - \boldsymbol{v}_C \wedge M\boldsymbol{v}_G$ es en general no nulo. A pesar de esto, para la situación inicial concreta con velocidad nula a la que se restringe el enunciado del problema, dicho término se anula. Con objeto de evitar posibles errores en la aplicación de dicho término complementario, es más aconsejable seguir la recomendación general de tomar momentos en G, donde siempre es válida dicha ecuación.

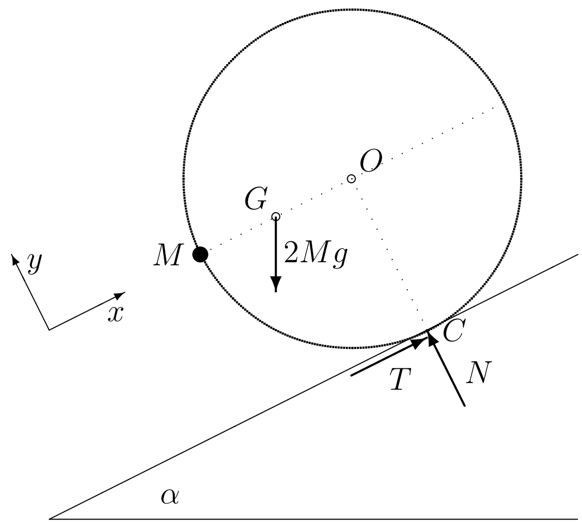


Diagrama de fuerzas sobre el sólido

Se consideran positivas la velocidad de rotación ($\omega = \dot\theta$) en sentido antihorario, el desplazamiento x paralelo a la recta en sentido ascendiente, e y perpendicular a la recta también ascendiente. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 2M\ddot{x}_G &= T - 2Mg\operatorname{sen}\alpha \\ 2M\ddot{y}_G &= N - 2Mg\cos\alpha \\ I_G\dot\omega &= N\frac{R}{2} + TR \end{aligned}$$

El momento de inercia es

$$I_G = (I_G)_{\mathrm{d}isco} + (I_G)_M = MR^2$$

Por otra parte, la aceleración de G se obtiene considerando que el movimiento es una rodadura y aplicando la fórmula general:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_G &= \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OG}) \\ &= \underbrace{(-\dot\omega R + \omega^2\frac{R}{2})}_{\ddot{x}_G}\,\boldsymbol{i} + \underbrace{(-\dot\omega\frac{R}{2})}_{\ddot{y}_G}\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la dinámica se obtiene:

$$\dot\omega = \frac{2}{7}\left[\frac{g}{R}(2\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \omega^2\right]$$

En el instante inicial es $\omega = 0$, con lo que resulta

$$\boxed{\dot\omega = \frac{2}{7}\frac{g}{R}(2\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}$$

Las expresiones de las reacciones T y N son:

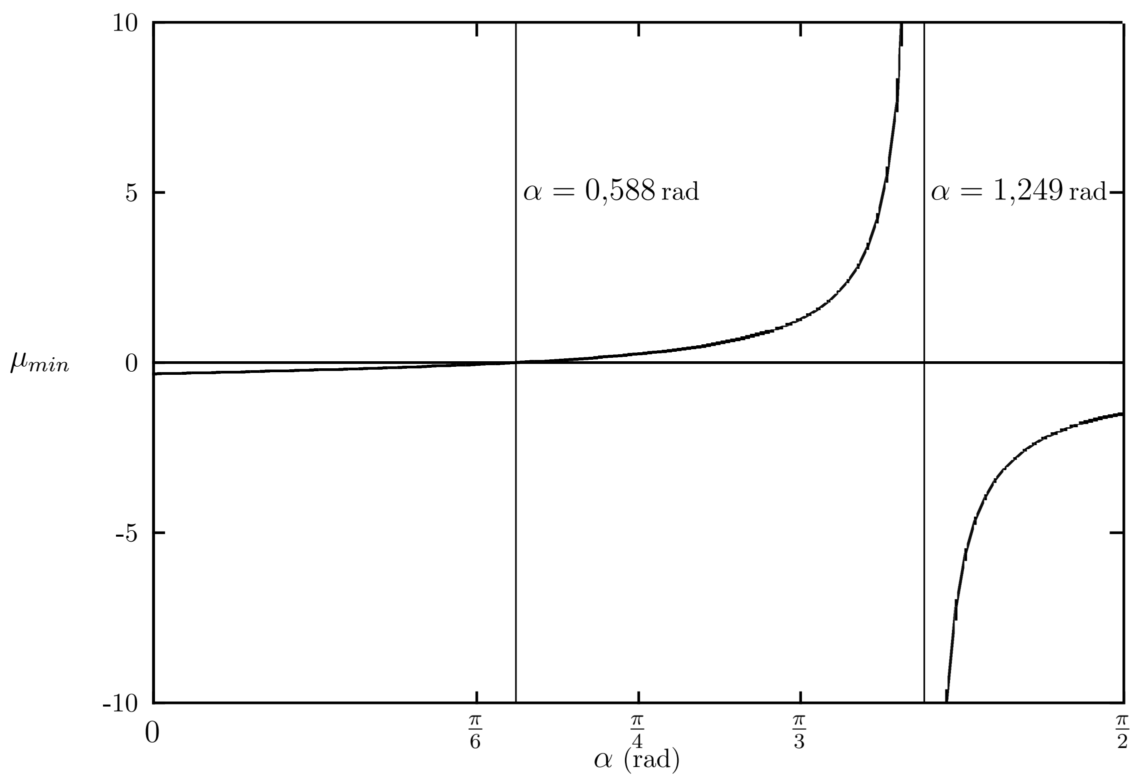
$$\begin{aligned} N &= 2Mg\cos\alpha - M\dot\omega R \\ T &= 2Mg\operatorname{sen}\alpha - 2M\dot\omega R + M\omega^2 R \end{aligned}$$

Eliminando el valor de $\dot{\omega}$ y considerando que inicialmente $\omega = 0$, resulta

$$\begin{aligned} N &= Mg\left[\frac{12}{7}\cos\alpha - \frac{4}{7}\operatorname{sen}\alpha\right] \\ T &= Mg\left[\frac{6}{7}\operatorname{sen}\alpha - \frac{4}{7}\cos\alpha\right] \end{aligned}$$

El coeficiente de rozamiento mínimo para que se produzca rodadura sin deslizamiento en el instante inicial es por tanto

$$\mu_{min} = \frac{T}{N} = \frac{6\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha}{12\cos\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha}$$



Representación gráfica del valor del coeficiente de fricción μ_{min}.

Se observa que para $\alpha < 0{,}588\,\mathrm{rad}$ ($= 33{,}69°$), es decir $\tan\alpha < 2/3$, el valor de μ_{min} es negativo. Esto quiere decir que para estos ángulos la tendencia al deslizamiento del punto de contacto C, y la reacción tangencial T por lo tanto, llevan sentido opuesto al dibujado. Por otra parte, para $\alpha = 1{,}249\,\mathrm{rad}$ ($= 71{,}565°$), es decir $\tan\alpha = 3$, la reacción normal N se anula. Para impedir el deslizamiento se necesitaría entonces un coeficiente infinito ($\mu_{min} \to \infty$). Por último, para $\alpha > 1{,}249\,\mathrm{rad}$ se vuelve a producir una tendencia al deslizamiento en sentido opuesto al considerado.