Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º *(sólo 1er. parcial)* Tiempo: 50 min.

Un proyectil se lanza desde la superficie de la tierra con una determinada velocidad inicial v_0. Despreciando la resistencia de la atmósfera, calcular la velocidad necesaria para que alcance una órbita elíptica de semieje mayor 80000 km. Calcular asimismo la excentricidad de la órbita si la dirección de lanzamiento forma un ángulo de 45° con la vertical. Se puede suponer que la tierra es esférica, con perímetro máximo 40000 km).

El radio de la tierra es $R = 40000/2\pi = 6366\,\text{km}$. La velocidad necesaria se obtiene de aplicar directamente la fórmula que relaciona la energía con el semieje de la elipse,

$$v_0^2 = \underbrace{GM}_{gR^2}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 10{,}951\,\text{km/s}}$$

Esta velocidad es independiente de la dirección de lanzamiento, que sólo influirá para la excentricidad de la elipse.

La velocidad obtenida es la velocidad absoluta del proyectil, medida respecto de la esfera terrestre en reposo. El enunciado no proporciona ningún dato sobre la posición inicial del cuerpo sobre la tierra, entendiéndose que el efecto de la velocidad de arrastre debida a la propia rotación de la tierra es pequeño (en efecto, ésta sería máxima en el ecuador, con valor $v' = 40000/86400 = 0{,}463\,\text{km/s}$).

Si se conoce la inclinación del lanzamiento (45°), se puede obtener la constante de las áreas,

$$C = R(R\dot{\varphi}) = R\frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

y por tanto el parámetro p de la cónica,

$$p = \frac{C^2}{GM} = \frac{C^2}{gR^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

obteniendo finalmente la excentricidad pedida:

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{v_0^2}{2ga} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 0{,}961}$$