Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (final y 1er. parcial) Tiempo: 50 min.

Un semiaro de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semiaro desliza una partícula de masa m con ligadura bilateral lisa. Se pide:

a. Ecuaciones del movimiento;

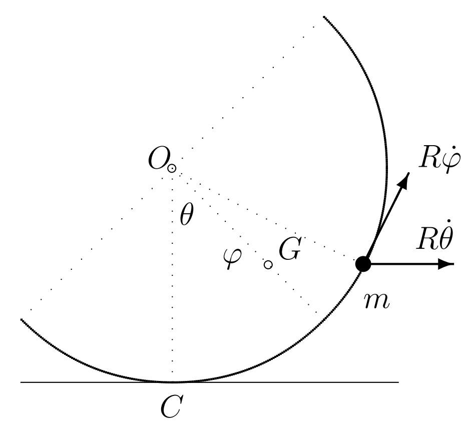
b. Integrales primeras, caso de haberlas.

Se toman como parámetros θ (giro del semiaro) y φ (ángulo con la vertical que define la posición de m relativa al aro).

La distancia OG se obtiene por el th. de Guldin:

$$2\pi\, OG \cdot \pi R = 4\pi R^2$$

$$OG = 2R/\pi$$



La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

siendo I_C el momento de inercia respecto del centro de rotación instantáneo, C, y v la velocidad absoluta de la masa m. Otenemos I_C aplicando el th. de Steiner:

$$\begin{aligned} I_G &= I_O - M(OG)^2 = MR^2 - M\frac{4R^2}{\pi^2} \\ I_C &= I_G + M(GC)^2 = I_G + MR^2\left(1 + \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi}\cos\theta\right) \\ &= 2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Por otra parte, la velocidad v se obtiene sumando (vectorialmente) el arrastre del semiaro y el movimiento relativo,

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

La lagrangiana es por tanto

$$\begin{aligned} L = T - V &= MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi) \\ &\quad + Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta + mgR\cos\varphi \end{aligned}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right) + mR^2\right]\ddot\theta + mR^2\ddot\varphi\cos\varphi - mR^2\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi \\ &\quad + \frac{2}{\pi}MR^2\dot\theta^2\operatorname{sen}\theta + Mg\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}\theta \\ 0 &= mR^2\ddot\theta\cos\varphi + mR^2\ddot\varphi + mgR\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

Al ser todas las fuerzas conservativas, la energía total se conserva, existiendo pues esta integral primera:

$$\begin{aligned} E = T + V &= MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi) \\ &\quad - Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta - mgR\cos\varphi \end{aligned}$$