Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

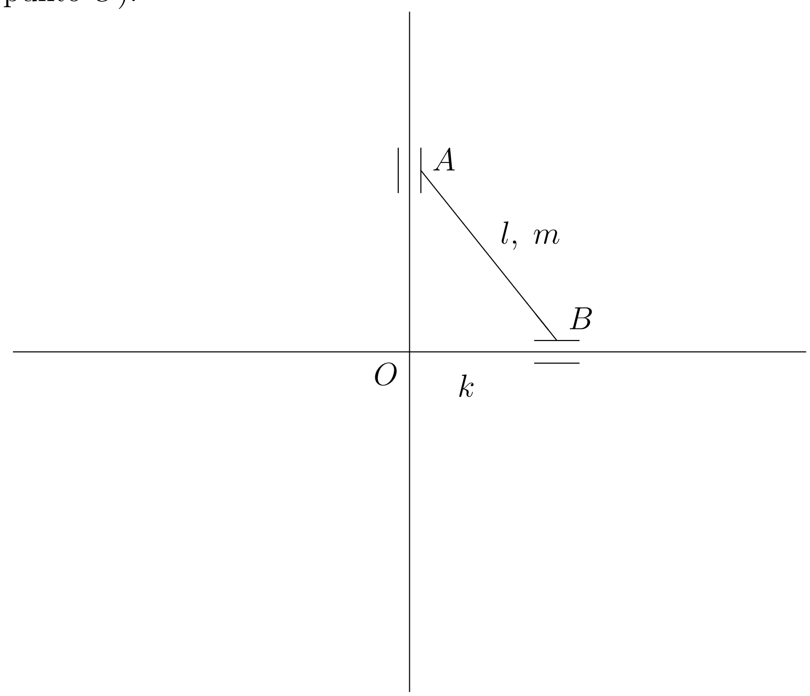
Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 6.º (final) y 5.º (2.º parcial) Tiempo: 45 min.

Una barra AB, de masa m y longitud l, tiene sus extremos obligados a moverse sobre sendos ejes vertical y horizontal respectivamente, dentro de un plano vertical, con enlaces lisos y bilaterales. El extremo B está asimismo unido al punto O de corte de los dos ejes mediante un resorte lineal de longitud natural nula. Obtener las posiciones de equilibrio, discutiendo la estabilidad. (Deberá considerarse que las deslizaderas en A y B pueden moverse libremente a un lado u otro del punto O).



Se toma como parámetro θ, ángulo que forma la barra con el eje vertical descendiente. El potencial es:

$$V = mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(l\operatorname{sen}\theta)^2$$

Para el equilibrio se buscan los puntos de potencial estacionario:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2}mgl\operatorname{sen}\theta + kl^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 0 & \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \\ \cos\theta = \frac{mg}{2kl} & \text{(sólo existe si } mg < 2kl\text{).} \end{cases}$$

Para la estabilidad se analiza la derivada segunda,

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta + kl^2\cos 2\theta$$

Particularizando para cada uno de los casos de equilibrio,

- para $\theta = 0$,
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = -\frac{1}{2}mgl + kl^2,$$
es decir, es estable (> 0) si $mg < 2kl$;

- para $\theta = \pi$,
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = \frac{1}{2}mgl + kl^2$$
estable (> 0) siempre;

- por último, para $\theta = \arccos(mg/2kl)$, siendo $mg < 2kl$,
$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\arccos(mg/2kl)} &= -\frac{1}{2}mgl\frac{mg}{2kl} + kl^2\left[2\left(\frac{mg}{2kl}\right)^2 - 1\right] \\ &= \frac{(mg)^2}{4k} - kl^2 < \frac{(2kl)^2}{4k} - kl^2 = 0\end{aligned}$$
luego es inestable (< 0) siempre que exista.

Estudiamos por último el caso límite $mg = 2kl$, en el que $\arccos(mg/2kl) = 0$, mediante las derivadas de orden superior.

$$\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}\theta^3} = \frac{1}{2}mgl\,\mathrm{sen}\,\theta - 2kl^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$$
$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}\theta^3} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^4V}{\mathrm{d}\theta^4} = \frac{1}{2}mgl\cos\theta - 4kl^2\cos 2\theta$$
$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^4V}{\mathrm{d}\theta^4} = \frac{1}{2}mgl - 4kl^2 = kl^2 - 4kl^2 = -3kl^2 < 0$$
luego este caso es también inestable.

Resumiendo,

- Si $mg < 2kl$ hay tres valores de θ para el equlibrio (4 posiciones):
  1. $\theta = 0$ (estable).
  2. $\theta = \pi$ (estable).
  3. $\arccos\frac{mg}{2kl}$ (inestable) (2 posiciones, a ambos lados de O).
- Si $mg \geq 2kl$ hay dos posiciones:
  1. $\theta = 0$ (inestable).
  2. $\theta = \pi$ (estable).