Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Deducir la expresión de las ecuaciones de la dinámica de un sólido rígido con un punto fijo, en forma vectorial. (2.5 ptos.)

El momento cinético de un sólido $\mathcal{B}$ respecto a un punto fijo O es $\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$, siendo $\boldsymbol{I}_O$ el tensor de inercia en el punto O. La ecuación de la dinámica proviene del principio del momento cinético,

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Para derivar en la anterior expresión conviene hacerlo respecto a un triedro móvil con el cuerpo, de forma que al derivar se mantenga constante el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$; en consecuencia es preciso añadir un término complementario de derivación,

$$\boldsymbol{M}_O = \left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\mathrm{d}t}\right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}),$$

llegándose finalmente a

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).}$$

Expresar las condiciones para el equilibrio y su estabilidad en el caso de una partícula ligada a una superficie lisa, definida de forma paramétrica por $\boldsymbol{r}(u, v)$, sometida a fuerzas que provienen de un potencial conocido $V(u, v)$. (2.5 ptos.)

La condición de equilibrio es la anulación del gradiente de V respecto de las coordenadas (u, v) de la curva:

$$\frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = 0.$$

Este equilibrio será estable si la matriz

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

es definida positiva (lo que equivale a las dos condiciones $\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} > 0$ y $\det(\mathbf{H}) > 0$.).

Dado un sistema mecánico con n grados de libertad, lineal, sin amortiguamiento, sometido a vibraciones libres, *escribir* la ecuación del movimiento en forma matricial y *explicar* cómo se obtienen los modos normales de vibración. (2.5 ptos.)

La ecuación matricial de la dinámica es

$$\mathsf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \mathsf{K}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

donde $\{\mathbf{q}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{q_i\}$ es el vector columna de coordenadas, $\mathsf{M} \stackrel{\text{def}}{=} [m_{ij}]$ la matriz de masa y $\mathsf{K} \stackrel{\text{def}}{=} [k_{ij}]$ la de rigidez. Los modos normales de vibración provienen de considerar soluciones del tipo $\{\mathbf{q}\} = C\{\mathbf{a}\}e^{i\omega t}$, en la que $\{\mathbf{a}\}$ es un vector constante. Derivando dos veces, $\{\ddot{\mathbf{q}}\} = -\omega^2\{\mathbf{q}\}$, y sustituyendo en la ecuación, se llega a

$$(-\omega^2\mathsf{M} + \mathsf{K})\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Esta ecuación define un problema de autovalores, que en general posee n valores propios ω_k^2, soluciones de la ecuación característica de orden n, $\det(-\omega^2\mathsf{M} + \mathsf{K}) = 0$. Los valores ω_k^2 son los coeficientes que hacen que la ecuación de autovalores posea solución distinta de la trivial; para cada autovalor ω_k^2 existirá pues un vector propio asociado, solución del sistema

$$(-\omega_k^2\mathsf{M} + \mathsf{K})\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\};$$

Estos n vectores propios $\{\mathbf{a}_k\}$ se denominan *"modos normales de vibración"*, y por su definición queda claro que están indeterminados respecto de al menos un parámetro ($\forall\lambda,\ \lambda\{\mathbf{a}_k\}$ también cumple la ecuación anterior), por lo que se suelen normalizar respecto de la métrica definida por la matriz de masa:

$$\{\mathbf{a}_k\} \mapsto \frac{\{\mathbf{a}_k\}}{\sqrt{\|\mathbf{a}_k\|\mathsf{M}\{\mathbf{a}_k\}}}$$

Obtener las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre de masa m, sometida a un potencial $V(x, y, z)$, siendo (x, y, z) las coordenadas cartesianas de la misma. (2.5 ptos.)

La Hamiltoniana es $H \stackrel{\text{def}}{=} p^i\dot{q}_i - L$, expresada en función de las nuevas variables (p^i, q_i, t); en nuestro caso los momentos generalizados son

$$p^x = m\dot{x}; \quad p^y = m\dot{y}; \quad p^z = m\dot{z}$$

y la expresión de H resulta, una vez eliminados $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$,

$$H(p^x, p^y, p^z, x, y, z) = \frac{1}{2m}\left[(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2\right] + V(x, y, z).$$

Las ecuaciones de Hamilton son por tanto

$$\frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{p^x}{m} = \dot{x}; \quad \frac{p^y}{m} = \dot{y}; \quad \frac{p^z}{m} = \dot{z}}$$

(ecuaciones que corresponden al cambio de variables que define p^i)

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}^i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}^x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\dot{p}^y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot{p}^z}$$

(ecuaciones que se corresponden con las de Newton de dinámica de la partícula).