

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1994)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

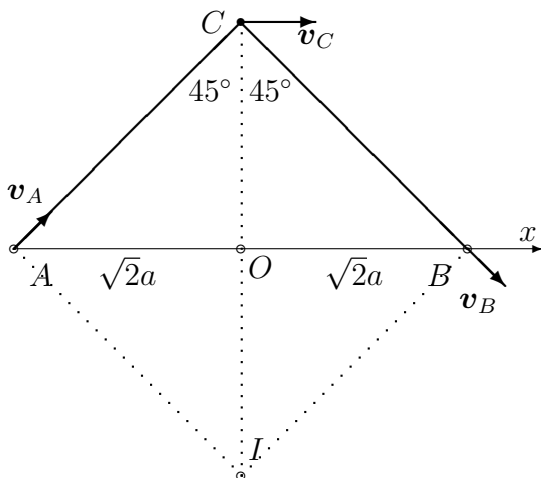
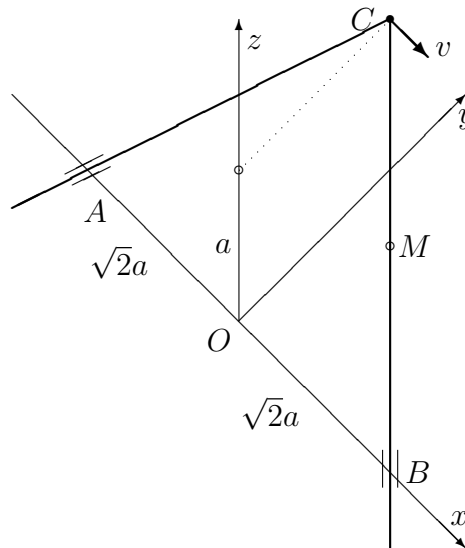
Ejercicio 3.º

Tiempo: 50 min.

Una escuadra formada por dos varillas perpendiculares soldadas en un extremo C se mueve de forma que éstas deslizan por dos puntos fijos $A(-\sqrt{2}a, 0, 0)$ y $B(\sqrt{2}a, 0, 0)$. El vértice C está obligado a moverse en un plano paralelo a Oxy , a una altura a , describiendo una circunferencia con centro en el eje Oz , y a velocidad constante v .

En el instante inicial C está en el plano Oyz y su velocidad es positiva según Ox . Se pide, en ese instante:

1. Velocidad angular de la escuadra.
2. Velocidad del punto de la varilla sobre B .
3. Velocidad del punto M intermedio entre C y B .



En primer lugar determinemos el radio de la circunferencia horizontal descrita por C , distancia de este punto al eje Oz . Examinando el triángulo rectángulo ACB se deduce inmediatamente que $OC = OB = OA = \sqrt{2}a$, por lo que dicho radio vale a .

Las velocidades de los puntos de las varillas en A y B llevan necesariamente la dirección de las propias varillas AC y CB respectivamente. Por otra parte, la velocidad de C es horizontal, y al igual que las velocidades de A y B , contenida en el plano de la escuadra. Por tanto concluimos que el movimiento tangente en el instante inicial es plano, reduciéndose a una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano.

El centro instantáneo de rotación es el punto I , simétrico de C respecto de O (para hallarlo basta trazar rectas normales a las dos varillas). Observamos que $IACB$ es un cuadrado, por lo que la distancia IC es $2\sqrt{2}a$. Así podemos calcular directamente la velocidad angular, ya que se conoce la velocidad de C :

$$\Omega = \frac{v}{2\sqrt{2}a}.$$

Para definir completamente la velocidad angular, falta su dirección, que es perpendicular al plano de la escuadra:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{v}{2\sqrt{2}a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right) = \frac{v}{4a}(\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

La velocidad de B es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{IB} = \frac{v}{4a}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \wedge a(\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{v}{4}(2\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}), \end{aligned}$$

cuyo módulo es $v_B = v/\sqrt{2}$. Por último, la velocidad de M es la semisuma de las de B y C ,

$$\mathbf{v}_M = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C) = \frac{v}{4} \left(3\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right).$$