Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

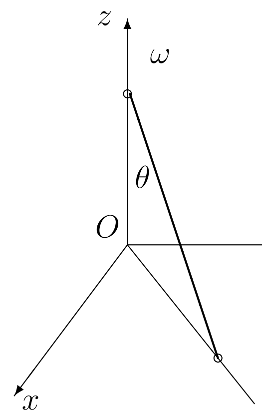
Ejercicio 4.º Tiempo: 50 min.

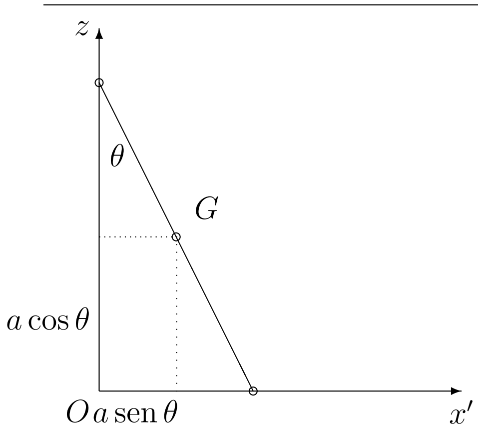
Sea una barra pesada de masa M y longitud $2a$ cuyos extremos están obligados a moverse sobre sendas rectas, una vertical y otra horizontal, cortándose ambas en un punto O. Al plano que contiene ambas rectas se le obliga a girar con una velocidad angular constante ω alrededor de la recta vertical.

Sea θ el ángulo que forma la barra con la recta vertical.

Se pide:

1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento.
2. Si cuando $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = \omega$, expresar el valor de $\dot{\theta}$ a lo largo del movimiento.





Consideramos los ejes móviles Ox' y Oz ligados a las rectas horizontal y vertical sobre las que desliza la varilla. Las coordenadas de G son

$$z_G = a\cos\theta; \quad x'_G = a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y las componentes de la velocidad correspondientes

$$\dot{z}_G = -a\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad \dot{x}'_G = a\dot{\theta}\cos\theta.$$

Por otra parte, la velocidad de rotación $\mathbf{\Omega}$ se compone de ω en dirección de Oz y $\dot{\theta}$ en dirección perpendicular al plano Ozx'. La energía cinética es por tanto

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\mathbf{\Omega} \\
&= \frac{1}{2}M(a^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M4a^2\right)(\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2) \\
&= \frac{2}{3}Ma^2(\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2)
\end{aligned}$$

y la Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{2}{3}Ma^2(\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) - Mga\cos\theta.$$

Para responder a la primera cuestión, observamos que la coordenada θ no es ciíclica, y tampoco se conserva la energía $(T+V)$ debido a que se desarrolla un trabajo sobre el sistema para mantener la rotación ω. Sin embargo, L no depende explícitamente de t, por lo que la integral de Jacobi es una constante del movimiento:

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{2}{3}Ma^2(-\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + Mga\cos\theta.$$

Cabe notar que, al haber tomado coordenadas móviles no inerciales, el valor de h es distinto de $T+V$:

$$T + V = \frac{2}{3}Ma^2(\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + Mga\cos\theta.$$

Las condiciones iniciales dadas permiten obtener la constante h,

$$h = \frac{2}{3}Ma^2(-\omega^2 + \omega^2) + Mga \cdot 0 = 0,$$

por lo que sustituyendo este valor queda la expresión siguiente para $\dot{\theta}$:

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{a}\cos\theta}$$