Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

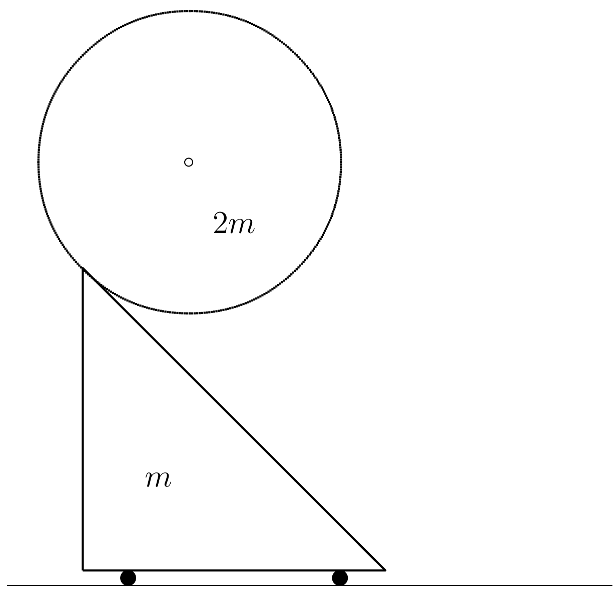
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

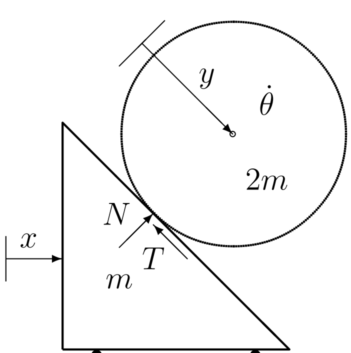
Ejercicio 6.º Tiempo: 45 min.

En un triángulo rectángulo isósceles de masa m, que puede deslizar sin rozamiento dentro de un plano vertical sobre una recta horizontal, apoyándose sobre un cateto, se coloca un disco homogéneo, de radio r y masa $2m$, que puede caer rodando sin deslizar por la hipotenusa del triángulo, desde el punto más alto de ésta.



Se pide:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento, discutiendo la existencia de integrales primeras.
2. Obtener la reacción del triángulo sobre el disco para un instante genérico, en que el disco aún no haya llegado a tocar la base.



Tomamos como grados de libertad x, desplazamiento horizontal del triángulo, e y, desplazamiento del disco relativo al triángulo en dirección de la hipotenusa. El ángulo de rotación es

$$\theta = \frac{y}{r}; \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{r}$$

La energía cinética del conjunto es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}2m\left[\left(\dot{x}+\frac{\dot{y}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2mr^2\right)\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \sqrt{2}m\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

y la energía potencial

$$V = 2mg\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

siendo la Lagrangiana por tanto

$$L = T - V = \frac{3}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \sqrt{2}m\dot{x}\dot{y} + \sqrt{2}mgy.$$

La coordenada x es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{3m\dot{x} + \sqrt{2}m\dot{y} = \text{cte.}} \tag{1}$$

Por otra parte, la ecuación en y es

$$\boxed{3m\ddot{y} + \sqrt{2}m\ddot{x} - \sqrt{2}mg = 0.} \tag{2}$$

Podemos eliminar la coordenada cíclica, a partir de la ecuación (1):

$$\ddot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\ddot{y} \tag{3}$$

y la ecuación (2) queda

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{3\sqrt{2}}{7}g}. \tag{4}$$

La reacción del plano es N en dirección normal y T en la tangencial. Estableciendo las ecuaciones dinámicas (Newton-Euler) del disco,

$$N - 2mg\frac{1}{\sqrt{2}} = 2m\frac{\ddot{x}}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

$$-T + 2mg\frac{1}{\sqrt{2}} = 2m\left(\ddot{y} + \frac{\ddot{x}}{\sqrt{2}}\right) \tag{6}$$

$$Tr = \frac{1}{2}2mr^2\frac{\ddot{y}}{r} \tag{7}$$

La ecuación (5), junto con (3) y (4) proporciona el valor de N:

$$\boxed{N = \frac{5\sqrt{2}}{7}mg}$$

y análogamente, empleando (6), (3) y (4):

$$\boxed{T = \frac{3\sqrt{2}}{7}mg.}$$

Como comprobación, si se emplea (7) y (4) se obtiene el mismo valor para T.