Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Enero de 1995)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

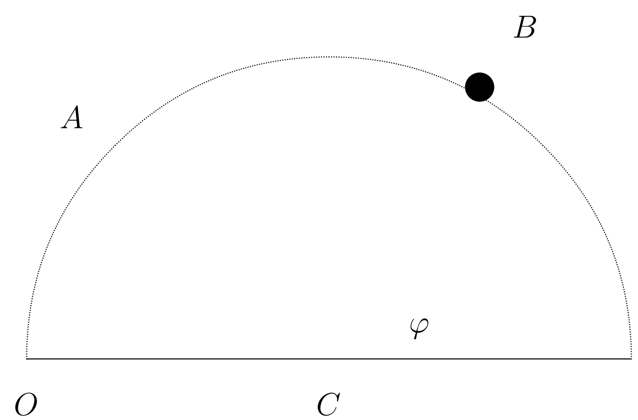
Ejercicio 3.º Tiempo: 45 min.

Un hilo AB flexible e inextensible, de longitud $\frac{\pi a}{2}$ y cuyo peso por unidad de longitud es p, se apoya sin rozamiento sobre la periferia de un semidisco D, fijo y de radio a, situado en un plano vertical.

El extremo A del hilo está unido a un muelle insertado en el perímetro del semidisco, cuyo otro extremo está fijo en el punto O, de longitud natural cero y constante $k = \frac{3}{\pi}(2-\sqrt{3})p$. En el extremo B del hilo hay una masa puntual de peso ap.

Se pide:

1. Calcular el valor del ángulo φ en la configuración de equilibrio del sistema.
2. Calcular la tensión del hilo en cada uno de sus puntos.
3. Calcular la reacción normal que el semidisco ejerce sobre la masa puntual.



---

1. Para obtener la configuración de equilibrio del hilo, aislamos este del muelle y del semidisco y planteamos el equilibrio de momentos en C:

$$T_A a - a^2 p\cos\varphi - \int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{2}} pa^2\cos\theta d\theta = 0 \qquad (1)$$

donde T_A es la tensión del hilo en el punto de unión con el resorte. T_A se obtiene imponiendo que en A la tensión del hilo es igual a la tensión del resorte:

$$T_A = kl_{OA} \qquad (2)$$

y l_{OA} (longitud del muelle en la configuración de equilibrio) es:

$$l_{OA} = \frac{\pi a}{2} - a\varphi \qquad (3)$$

sustituyendo (2,3) en (1) y particularizando para el valor dado de k se obtiene al operar, la ecuación no lineal:

$$\frac{3}{2}(2-\sqrt{3}) = \frac{3}{\pi}(2-\sqrt{3})\varphi + 2\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi$$

Resolviendo esta ecuación por algún procedimiento numérico iterativo, se obtiene:

$$\varphi = 1{,}047197 = \frac{\pi}{3}$$

Con este valor, queda definida la configuración de equilibrio del hilo.

2. Para obtener la tensión del hilo en un punto genérico P definido por el ángulo θ que CP forma con la horizontal, aislamos el hilo en dicho punto y planteamos el equilibrio de momentos en C:

$$-pa^2\cos\frac{\pi}{3} + Ta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\theta} pa^2\cos\alpha d\alpha = 0$$

Operando y despejando T, se obtiene:

$$T = \frac{pa}{2}(1+\sqrt{3}) - pa\operatorname{sen}\theta$$

3. Aislando la partícula y planteando el equilibrio en dirección normal:

$$N - pa\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 0$$

se obtiene:

$$N = pa\frac{\sqrt{3}}{2}$$