ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Enero de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

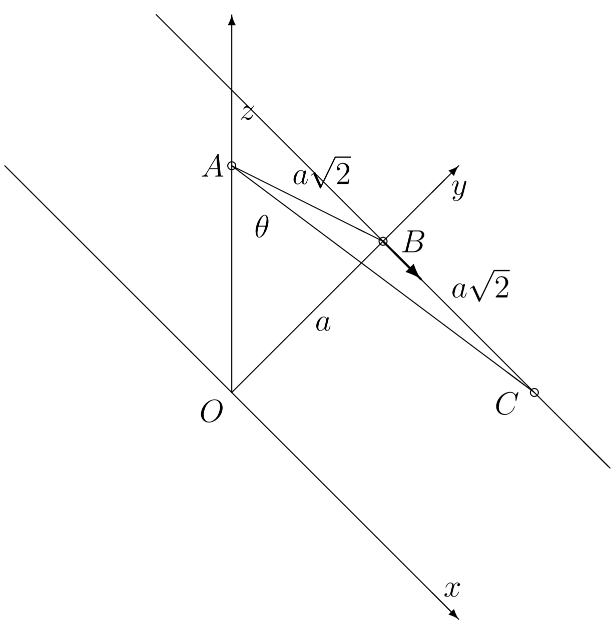
Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

Una placa ABC tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles, con lados $AB = BC = a\sqrt{2}$. Se mueve en relación a un triedro $Oxyz$ de forma que A desliza sobre el eje Oz, B se mueve sobre una recta horizontal paralela a Ox que pasa por $(0, a, 0)$, según la ley $x_B = a \operatorname{sen} \omega t$, y C se mantiene dentro del plano Oxy. En el instante inicial $(t = 0)$ A está en el lado positivo de Oz.

a. Obtener la velocidad de A para un instante t genérico.

b. Sea θ el ángulo que forma AB con el eje Oz y ψ el que forma la proyección de AB sobre Oxy con Ox. Obtener las expresiones de ambos en función del tiempo para un instante genérico, $\theta(t)$ y $\psi(t)$.

c. Describir el movimiento instantáneo del sólido para un instante genérico, obteniendo la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}(t)$ y la velocidad mínima o velocidad de deslizamiento.



Configuración inicial de la placa ABC

---

a. En un instante genérico la proyección horizontal de AB vale

$$OB = a\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \omega t}.$$

La coordenada z de A es por tanto

$$z_A = \sqrt{AB^2 - OB^2} = a \cos \omega t.$$

Derivando ésta se obtiene la velocidad,

$$\boldsymbol{v}_A = -a\omega \operatorname{sen} \omega t\, \boldsymbol{k}.$$

b. Los ángulos citados tienen las expresiones siguientes

$$\cos\theta = \frac{AO}{AB} = \frac{\cos\omega t}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{a}{OB} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\omega t}} \tag{2}$$

c. Sea $\boldsymbol{u}$ el versor en la dirección BC, perpendicular al plano vertical AOB. La velocidad angular de la placa es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\boldsymbol{u} \tag{3}$$

Conviene observar que en un caso general podría existir una componente adicional de la rotación, $\dot{\varphi}$, según la dirección de AB. Sin embargo, la condición de que C permanezca sobre Oxy obliga a $\dot{\varphi} = 0$, como sería fácil comprobar desarrollando la expresión $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AC}$.

Obtenemos $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ derivando (1) y (2) respectivamente:

$$-\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\omega\operatorname{sen}\omega t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\omega t}}$$

$$\dot{\psi}\cos\psi = -\frac{\omega\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t}{(1+\operatorname{sen}^2\omega t)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = -\frac{\omega\cos\omega t}{1+\operatorname{sen}^2\omega t}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \operatorname{sen}\psi\ \boldsymbol{i} - \cos\psi\ \boldsymbol{j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\omega t}}\boldsymbol{i} - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\omega t}}\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Resulta por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \frac{\omega}{1+\operatorname{sen}^2\omega t}(\operatorname{sen}\omega t\ \boldsymbol{i} - \operatorname{sen}^2\omega t\ \boldsymbol{j} - \cos\omega t\ \boldsymbol{k})}$$

La velocidad mínima es la velocidad que tienen los puntos del eje del movimiento helicoidal tangente (E.H.T.). Se obtiene proyectando la velocidad de un punto cualquiera sobre la dirección del E.H.T.:

$$v_{min} = \boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}$$

Desarrollando esta expresión,

$$\boxed{v_{min} = \frac{a\omega\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^4\omega t}}}$$

Vectorialmente, la expresión de la velocidad de los puntos del E.H.T. es

$$\boldsymbol{v}_{min} = \frac{a\omega\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t}{1+\operatorname{sen}^4\omega t}(\operatorname{sen}\omega t\ \boldsymbol{i} - \operatorname{sen}^2\omega t\ \boldsymbol{j} - \cos\omega t\ \boldsymbol{k})$$