Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

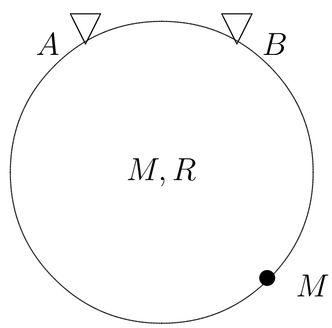
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Enero de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º Tiempo: 60 min.

Un aro de radio R y masa M se mueve en el espacio de manera que los puntos A y B, que definen una cuerda horizontal de longitud R, son fijos. Sobre el aro se mueve con ligadura bilateral lisa un punto material de masa M. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Integrales primeras del movimiento en caso de que existan.
3. Para el caso de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, linealizar las ecuaciones del movimiento y obtener las frecuencias propias del mismo.



---

1. El sistema definido tiene dos grados de libertad θ y φ:

   θ = ángulo que forma la recta que pasa por el centro del aro y por la masa puntual, con la recta que pasa por el centro del aro y el punto medio del segmento AB.

   φ = ángulo que forma el plano vertical que contiene a AB con el plano del aro.

   Las expresiones de la energía cinética y de la energía potencial son:

$$T = \frac{1}{2}MR^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\right)^2\right] + \frac{5}{8}MR^2\dot{\varphi}^2$$

$$V = -MgR\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - MgR(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta)\cos\varphi$$

La función Lagrangiana es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}MR^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta)^2\right) + \frac{5}{8}MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR(\sqrt{3} + \cos\theta)\cos\varphi \quad (1)$$

y las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

que sustituyendo la expresión de L que tenemos y operando, resultan:

$$MR^2\ddot{\theta} + MR^2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta)\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta + MgR\cos\varphi \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (2)$$

$$MR^2(2 + \sqrt{3}\cos\theta + \cos^2\theta)\ddot{\varphi} - MR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}(\sqrt{3} + 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta + MgR(\sqrt{3} + \cos\theta)\operatorname{sen}\varphi = 0 \quad (3)$$

2. Dado que todas las fuerzas son conservativas, la conservación de la energía es una integral primera del movimiento:

$$T+V = \text{cte} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}MR^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta)^2\right) + \frac{5}{8}MR^2\dot{\varphi}^2 - MgR(\sqrt{3} + \cos\theta)\cos\varphi = \text{cte}$$

   Como no hay coordenadas cíclicas, no existen más integrales primeras.

3. La posición de equilibrio estable viene definida por $\theta = 0$ y $\varphi = 0$ (el aro, vertical con su centro de gravedad lo más bajo posible y la masa puntual situada en el punto más bajo del aro).

   Para linealizar las ecuaciones hacemos $\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$ pequeños y despreciamos los infinitesimos de orden superior a 2. Con ello, las ecuaciones del movimiento linealizadas para pequeñas oscilaciones resultan:

$$MR^2\ddot{\theta} + MgR\theta = 0 \quad (4)$$
$$MR^2(3 + \sqrt{3})\ddot{\varphi} + MgR(1 + \sqrt{3})\varphi = 0 \quad (5)$$

   Como las ecuaciones (4,5) quedan desacopladas en θ y φ, es inmediato obtener las frecuencias propias:

$$\omega_1^2 = \frac{MgR}{MR^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\omega_2^2 = \frac{MgR(1 + \sqrt{3})}{MR^2(3 + \sqrt{3})} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{3}R}}$$