Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

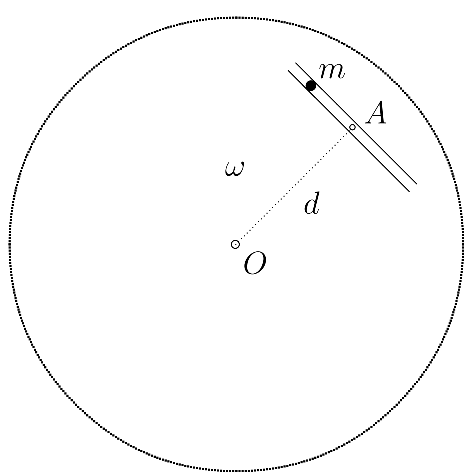
1er. EXAMEN PARCIAL (3 de Febrero de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

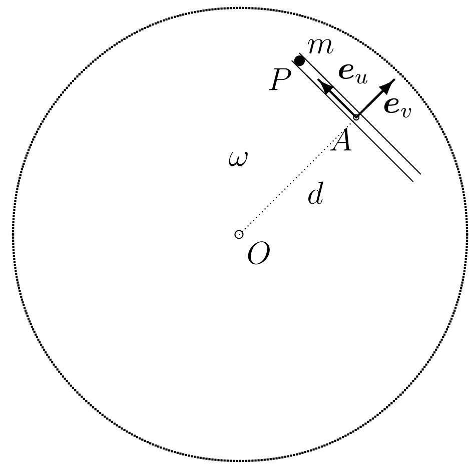
Ejercicio 2.º (20 ptos.) Tiempo: 1 h 30 min.

Un disco horizontal gira con velocidad ω constante alrededor de un eje vertical por su centro O. En el disco existe una ranura recta, situada a una distancia d de O, en la cual se mueve una masa puntual m. Sea A el pie de la perpendicular por O a la ranura.

1. Supuesto conocido el movimiento de m en la ranura, definido por su distancia $u(t)$ al punto A, obtener la expresión de la velocidad y aceleración absolutas (relativas al sistema inercial), según las direcciones de la ranura y normal a la misma. Deberá suponerse que m no llega a los extremos de la ranura.
2. Consideramos ahora que en la ranura existe un resorte lineal que une m con A, de constante k y longitud natural nula. Obtener la ecuación diferencial del movimiento de m en función de u.
3. Integrar esta ecuación para las condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$, obteniendo todas las soluciones posibles en función del valor de ω.
4. En la hipótesis $\omega^2 < k/m$, si la ranura establece un enlace bilateral liso, obtener la reacción de ésta sobre m en función del tiempo.
5. Obtener la Lagrangiana y ecuación de Lagrange del sistema.
6. En el caso que exista alguna integral primera, obtener ésta. Razonar si se conserva o no la energía total del sistema.



La ley $u(t)$ define el movimiento relativo a la ranura, que a su vez tiene un movimiento solidario al disco. Denominamos $\boldsymbol{e}_u$ al versor en la dirección de la ranura, y $\boldsymbol{e}_v$ en la dirección normal a la misma. La velocidad tiene, además de la componente de arrastre por la rotación del disco, la velocdad relativa en la dirección de la ranura:



$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{arr} &= d\omega\boldsymbol{u} - u\omega\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}_{rel} &= \dot{u}\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Por tanto las componentes de la velocidad pedidas son

$$\boxed{v_u = d\omega + \dot{u}; \qquad v_v = -u\omega} \tag{1}$$

La aceleración comprende los términos de arrastre, Coriolis y relativo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{arr} &= -\omega^2\boldsymbol{OP} = -\omega^2(d\,\boldsymbol{e}_v + u\,\boldsymbol{e}_u) \\ \boldsymbol{a}_{cor} &= 2\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{u}\,\boldsymbol{e}_u = -2\omega\dot{u}\,\boldsymbol{e}_v \\ \boldsymbol{a}_{rel} &= \ddot{u}\,\boldsymbol{e}_u \end{aligned}$$

Y agrupando las componentes,

$$\boxed{a_u = -\omega^2 u + \ddot{u}; \quad a_v = -\omega^2 d - 2\omega\dot{u}}$$

Si existe un resorte en la ranura, se obtiene la ecuación pedida expresando la dinámica en la dirección de la ranura:

$$-ku = ma_u \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u} + (k - m\omega^2)u = 0} \tag{2}$$

La solución de esta ecuación depende del signo de $k^* = k - m\omega^2$, existiendo tres casos posibles:

a. si $k^* < 0$ (es decir, $\omega^2 > k/m$), la solución general es exponencial:

$$u(t) = C_1 e^{\sqrt{|k^*/m|}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{|k^*/m|}\,t}$$

y particularizando para las condiciones iniciales dadas,

$$u(t) = u_0 \cosh\left(\sqrt{|k^*/m|}\,t\right).$$

Esta solución crece indefinidamente con t, por lo que no origina un movimiento oscilatorio.

b. si $k^* = 0$ (es decir, $\omega^2 = k/m$), la solución general es

$$u(t) = C_1 t + C_2$$

y con las condiciones iniciales dadas,

$$u(t) = u_0.$$

Es decir, se mantendría inmóvil respecto a la ranura.

c. si $k^* > 0$ (es decir, $\omega^2 < k/m$), la solución general es

$$u(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k^*/m}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{k^*/m}\, t)$$

y para las condiciones iniciales dadas,

$$u(t) = u_0 \cos(\sqrt{k^*/m}\, t).$$

Esta solución corresponde a un movimiento oscilatorio relativo a la ranura.

Para hallar la reacción basta expresar la dinámica en dirección normal a la ranura:

$$R_v = ma_v = -m(\omega^2 d + 2\omega\dot{u})$$

Puesto que se conoce el movimiento $u(t)$, se puede eliminar $\dot{u}$ de esta expresión:

$$\dot{u} = -u_0\sqrt{k^*/m}\operatorname{sen}(\sqrt{k^*/m}\, t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_v = -m\left(\omega^2 d - 2\omega u_0\sqrt{k^*/m}\operatorname{sen}(\sqrt{k^*/m}\, t)\right)}$$

Para obtener la Lagrangiana, se parte de la expresión de la velocidad de m (1) para calcular la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m(\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2 u^2) \tag{3}$$

La Lagrangiana resulta

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2 u^2) - \frac{1}{2}ku^2}$$

La ecuación de Lagrange correspondiente es

$$m\ddot{u} - m\omega^2 u + ku = 0,$$

que es la misma que se obtuvo anteriormente (2) por procedimientos “Newtonianos”.

Puesto que la Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, se conserva la integral de Jacobi:

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - L = \text{cte.}$$

Desarrollando esta expresión y obteniendo la constante a partir de las condiciones iniciales,

$$h = \frac{1}{2}m(-\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 - \omega^2 u^2) + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}m(-\omega^2 d^2 - \omega^2 u_0^2) + \frac{1}{2}ku_0^2. \tag{4}$$

Resulta finalmente

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2 - \omega^2(u^2 - u_0^2)\right) + \frac{1}{2}k(u^2 - u_0^2) = 0}$$

Observamos que derivando esta expresión se vuelve a obtener la misma ecuación (2).

La expresión de la energía total es

$$T + V = \frac{1}{2}m(\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2 u^2) + \frac{1}{2}ku^2;$$

ésta no coincide con la integral de Jacobi (4), debido a que la coordenada u es relativa al disco móvil, y la expresión (3) de T no resulta por tanto homogénea de grado 2 en $\dot{u}$. No se conserva la energía total del sistema, debido a que para mantener el movimiento del disco es necesario realizar un trabajo mediante algún agente externo al sistema, que varía la energía del mismo.