Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (3 de Febrero de 1995)

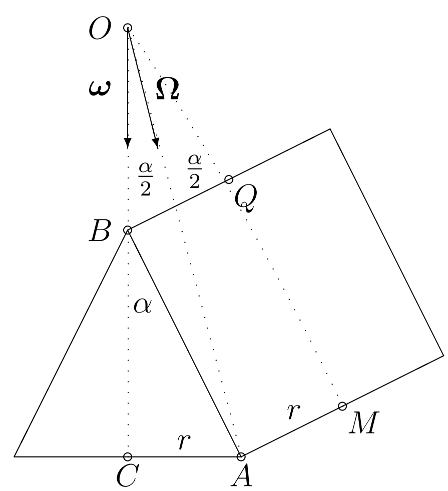
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 60 min.

Un cilindro recto de radio r se mueve manteniéndose tangente a un cono fijo, de radio de la base r y semiángulo α, de forma que comparten en todo momento una generatriz. Una base del cilindro rueda con velocidad uniforme sin deslizar sobre la base del cono, de forma que realiza una revolución completa alrededor del eje del cono en un tiempo τ. La otra base del cilindro se mantiene en contacto con el vértice del cono. Obtener las expresiones de:

1. velocidad de rotación del cilindro, calculando la componente de pivotamiento;
2. axoides del movimiento y aceleración angular del cilindro;
3. aceleración del punto A de la base del cilindro en contacto con la base del cono.

En la figura se muestra una sección por el plano que contiene a los ejes del del cono (BC) y del cilindro (QM), así como a la generatriz común AB. El punto A de contacto entre las bases tiene velocidad nula, debido a la condición de rodadura. Asimismo, el punto O de corte de la prolongación del eje del cilindro con el eje del cono es un punto fijo del movimiento. Por lo tanto, el movimiento instantáneo es una rodadura alrededor del eje OA, eje que a su vez gira alrededor del eje OC.
En la figura observamos que el ángulo $\widehat{COM} = \alpha$. Asimismo, los triángulos rectángulos AOC y AOM son iguales por compartir hipotenusa y tener un cateto igual (r), por lo que los ángulos $\widehat{AOC} = \widehat{AOM} = \alpha/2$ son iguales.



El punto Q del eje del cilindro desarrolla un movimiento circular, alrededor del eje OC. Su velocidad es

$$v_Q = \frac{2\pi}{\tau} r \cos\alpha;$$

por otra parte, interpretando el movimiento como rotación de velocidad Ω alrededor del eje OA

$$v_Q = \Omega \cdot OQ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \Omega r \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

Igualando ambas expresiones, y en función del versor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{OA}/|\boldsymbol{OA}|$, se obtiene

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} == \frac{4\pi}{\tau} \cos\frac{\alpha}{2}\, \boldsymbol{u}}$$

La componente de pivotamiento es la proyección sobre la normal a AB:

$$\Omega_p = \Omega \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_p = \frac{2\pi}{\tau} \operatorname{sen}\alpha}$$

En el movimiento, el eje OA gira alrededor del eje OC con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (2\pi/\tau)\boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{OC}/|\boldsymbol{OC}|$. Por tanto los axoides son:

Axoide fijo: cono de eje OC, vértice O, semiángulo $\alpha/2$.

Axoide móvil: cono de eje OM, vértice O, semiángulo $\alpha/2$.

La aceleración angular, al ser constante el módulo de $\boldsymbol{\Omega}$, proviene de la rotación $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{j}}$$

siendo $\boldsymbol{j}$ el versor normal al plano de la figura.

Para obtener la aceleración de A se aplica la expresión general

$$\boldsymbol{a}_A = \underbrace{\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{0}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OA}}_{=\boldsymbol{0}})$$

obteniéndose

$$\boxed{\boldsymbol{a}_A = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \boldsymbol{v} = \frac{8\pi^2}{\tau^2} r \cos\frac{\alpha}{2}\, \boldsymbol{v}}$$

siendo $\boldsymbol{v}$ el versor perpendicular a OA dentro del plano de la figura.