Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (29 de Mayo de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Un sistema material descrito mediante coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ posee una función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. *Expresar* la función Hamiltoniana y *deducir* las ecuaciones canónicas de Hamilton. (2.5 ptos.)

La Hamiltoniana H se define como la transformada de Legendre de L respecto a $\dot{q}_k$, expresándose en función de sus variables conjugadas (momentos generalizados) $p^k \stackrel{\text{def}}{=} \partial L/\partial \dot{q}_k$:

$$\boxed{H(q_k, p^k, t) \stackrel{\text{def}}{=} p^k \dot{q}_k - L} \qquad \text{(sumado en } k\text{)}$$

H debe quedar expresada en función de las variables (q_k, p^k, t), eliminando $\dot{q}_k$ de la expresión anterior. Tomando el diferencial de ésta y simplificando términos,

$$dH = dp^k \dot{q}_k + p^k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{q}_k dp^k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Identificando coeficientes y empleando las ecuaciones de Lagrange $\left(\dot{p}^k = \partial L/\partial q_k\right)$ se deducen las ecuaciones canónicas:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}^k; \quad \frac{\partial H}{\partial p^k} = \dot{q}_k}$$

A un punto Q de un sólido $\mathcal{B}$ se le comunica un movimiento impuesto de aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$, no existiendo más restricciones ni fuerzas aplicadas a $\mathcal{B}$. Conocido el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_Q$, la masa M y la posición $\boldsymbol{r}_G$ del C.D.M., *obtener* la ecuación (vectorial) de la dinámica (ecuación de Euler). (2.5 ptos.)

Tomando un sistema (SQ) no inercial sin giro y origen en Q, la aceleración de arrastre es debida únicamente a la traslación, $\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$ (la de Coriolis es obviamente nula). El momento en Q de las fuerzas de inercia viene dado por la integral

$$-\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q) \wedge \ddot{\boldsymbol{r}}_Q \rho \, dV = -(\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M \ddot{\boldsymbol{r}}_Q$$

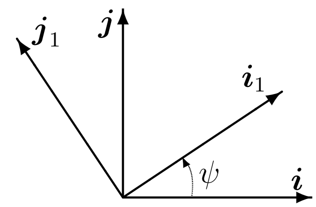
La dinámica relativa a (SQ) es la de un sólido con Q fijo, siendo necesario añadir el momento de las fuerzas (ficticias) de inercia, que en este caso son las únicas al no haber fuerzas aplicadas:

$$\boxed{-(\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M \ddot{\boldsymbol{r}}_Q = \boldsymbol{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega})}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad instantánea de rotación de $\mathcal{B}$.

Un triedro ortonormal $(O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k})$ se transforma en otro $(O\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{k}_1)$ mediante una rotación $\psi\boldsymbol{k}$ alrededor del eje Oz. Obtener la matriz $[\mathbf{R}]$ de transformación que relaciona los versores de ambos triedros y su inversa $[\mathbf{R}]^{-1}$. (2.5 ptos.)

Proyectando $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ sobre $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1)$ se obtienen las relaciones



$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_1 &= \boldsymbol{i}\cos\psi + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\psi\\ \boldsymbol{j}_1 &= -\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\psi + \boldsymbol{j}\cos\psi\end{aligned}$$

de donde se deduce la expresión matricial

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{i}_1\\ \boldsymbol{j}_1\\ \boldsymbol{k}_1\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0\\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}]}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{Bmatrix}$$

La matriz $[\mathbf{R}]$ es ortogonal por lo que su inversa es $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0\\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Obtener mediante aplicación del principio de los trabajos virtuales las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sólido rígido sin ligaduras sometido a fuerzas externas de resultante $\boldsymbol{F}$ y momento $\boldsymbol{M}_G$ en su C.D.M. Razonar si dichas condiciones son válidas para sistemas que no sean rígidos. (2.5 ptos.)

Un desplazamiento virtual cualquiera compatible con la condición de sólido rígido se puede expresar como:

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{r}_G + \delta\boldsymbol{\varphi}\wedge\underbrace{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)}_{\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{\rho}} \tag{1}$$

con $\delta\boldsymbol{r}_G$ y $\delta\boldsymbol{\varphi}$ arbitrarios.

Suponiendo un conjunto de fuerzas $\{\boldsymbol{f}_i\}$ externas aplicadas en puntos $\boldsymbol{r}_i$, el trabajo virtual es

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_i \boldsymbol{f}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_G + \sum_i(\delta\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{\rho}_i)\cdot\boldsymbol{f}_i\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_G + \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\underbrace{\sum_i(\boldsymbol{\rho}_i\wedge\boldsymbol{f}_i)}_{=\boldsymbol{M}_G}\end{aligned}$$

haciendo $\delta W = 0$ para $(\delta\boldsymbol{r}_G, \delta\boldsymbol{\varphi})$ arbitrarios se llega a las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio (ecuaciones cardinales de la estática):

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0};\quad \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}} \tag{2}$$

En sistemas que no sean rígidos estas condiciones serán siempre necesarias pero en general no suficientes para garantizar el equilibrio. Esto se debe a que los desplazamientos virtuales compatibles son un conjunto más amplio que los definidos por (1), por lo que las condiciones (2) no garantizan la anulación del trabajo virtual.