Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (29 de Mayo de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

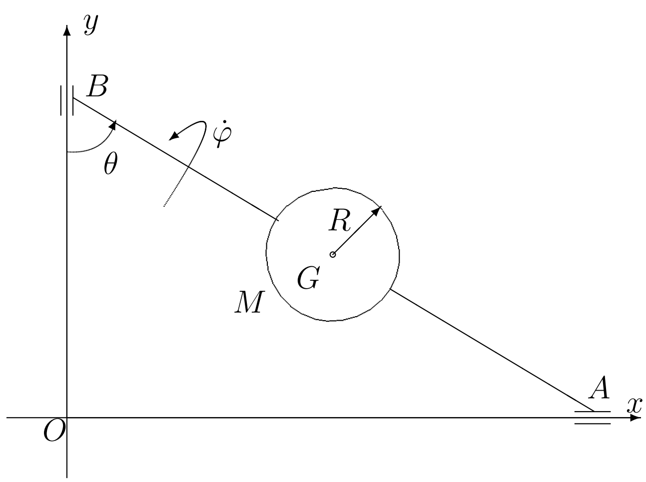
Ejercicio 2.º Tiempo: 60 min.

El sistema de la figura está formado por un rotor que se puede asimilar a una esfera homogénea, de masa M y radio R, ensartada rígidamente en el centro de un eje diametral de longitud l. El eje desliza libremente en sus extremos A y B sobre los ejes Ox y Oy mediante enlaces bilaterales lisos. El conjunto está sometido a la gravedad terrestre. Se pide:

a. Obtener la expresión de la Energía Cinética y del momento cinético respecto del C.D.M. (G) en un instante genérico.

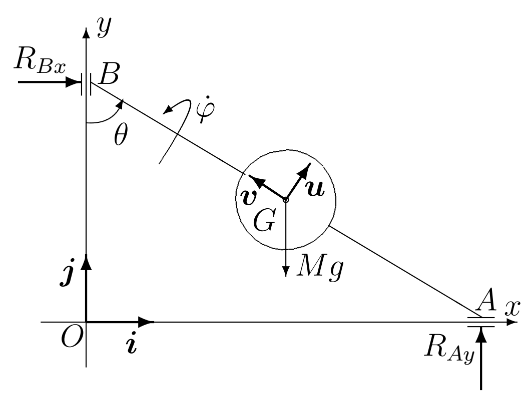
b. Ecuaciones del movimiento e integrales primeras, suponiendo que en el instante inicial es $\theta_0 = \pi/2,\ \dot\theta_0 = 0,\ \dot\varphi_0 = \omega$.

c. Obtener las reacciones en los enlaces.



---

a. Emplearemos para las expresiones vectoriales los versores siguientes: $\boldsymbol{i}$ según Ox, $\boldsymbol{j}$ según Oy, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}$ según AB y $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{k}$. La energía cinética es



$$T = \frac{1}{2} M(\dot x_G^2 + \dot y_G^2) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

considerando que

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta \boldsymbol{k} + \dot\varphi \boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$x_G = \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta; \quad y_G = \frac{l}{2} \cos\theta \tag{2}$$

resulta

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left(M\frac{l^2}{4} + \frac{2}{5}MR^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\dot\varphi^2} \tag{3}$$

El momento cinético es

$$\boxed{\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} + \frac{2}{5}MR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{v}} \tag{4}$$

b. La energía potencial vale

$$V = Mg\frac{l}{2}\cos\theta \tag{5}$$

La Lagrangiana $L = T - V$ queda expresada restando (3) y (5). En función de ella se obtienen las ecuaciones de Lagrange. La coordenada φ es cíclica, resultando una integral primera,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{5}MR^2\dot{\varphi} = C^{\varphi} \quad \text{(cte)}$$

y considerando la condición inicial $\dot{\varphi}_0 = \omega$,

$$\boxed{\dot{\varphi} = \omega} \quad \text{(cte).} \tag{6}$$

Para la coordenada θ la ecuación es

$$\boxed{\left(M\frac{l^2}{4} + \frac{2}{5}MR^2\right)\ddot{\theta} = Mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta} \tag{7}$$

La ecuación de conservación de la energía, se expresa sumando (3) y (5):

$$\frac{1}{2}\left(M\frac{l^2}{4} + \frac{2}{5}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\dot{\varphi}^2 + Mg\frac{l}{2}\cos\theta = E \quad \text{(cte)}$$

La constante E se obtiene particularizando para el instante inicial $(\theta_0 = \pi/2, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = \omega)$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega^2$$

Resultando finalmente la ecuación

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(M\frac{l^2}{4} + \frac{2}{5}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + Mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0} \tag{8}$$

Obsérvese que ésta obliga a que sea $\cos\theta \leq 0$, es decir, que con las condiciones iniciales dadas será $\theta \geq \pi/2$, quedando por tanto el extremo B de la varilla por debajo del eje Ox en todo instante.

c. Llamando $\boldsymbol{R}_A = R_{Ay}\boldsymbol{j} + R_{Az}\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{R}_B = R_{Bx}\boldsymbol{i} + R_{Bz}\boldsymbol{k}$ a las reacciones, la ley del balance de cantidad de movimiento arroja

$$-Mg\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B \quad = \quad M\boldsymbol{a}_G$$

derivando (2) para obtener $\boldsymbol{a}_G$ y separando las componentes,

$$
\begin{aligned}
R_{Bx} &= M\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta), \\
R_{Ay} &= Mg - M\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta), \\
R_{Az} &= -R_{Bz};
\end{aligned}
$$

y eliminando $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}$ a partir de (7) y (8) se obtiene

$$
\boxed{R_{Bx} = Mg\frac{l^2}{l^2 + 8R^2/5}3\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \tag{9}
$$

$$
\boxed{R_{Ay} = Mg\left[1 - \frac{l^2}{l^2 + 8R^2/5}(\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta)\right]} \tag{10}
$$

Para obtener la reacción que falta (R_{Az}) es necesario expresar la ecuación del momento cinético:

$$
\boldsymbol{M}_G = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G
$$

El momento en G es

$$
\boldsymbol{M}_G = -R_{Az}l\boldsymbol{u} + \frac{l}{2}(R_{Ay}\operatorname{sen}\theta - R_{Bx}\cos\theta)\boldsymbol{k} \tag{11}
$$

por otra parte, derivando (4) en relación al triedro intermedio[1] $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$ y teniendo en cuenta (6) resulta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G &= \boldsymbol{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\
&= \frac{2}{5}MR^2\ddot{\theta}\boldsymbol{k} + \underbrace{\frac{2}{5}MR^2\ddot{\varphi}\boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{0}} - \frac{2}{5}MR^2\omega\dot{\theta}\boldsymbol{u}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Igualando las componentes según $\boldsymbol{u}$ en (11) y (12),

$$
\boxed{R_{Az} = -R_{Bz} = \frac{2}{5}M\frac{R^2}{l}\omega\dot{\theta}} \tag{13}
$$

Como comprobación, veamos que las reacciones R_{Bx} y R_{Ay} obtenidas antes en (9) y (10) proporcionan la componente del momento según $\boldsymbol{k}$ de la ecuación (12):

$$
\frac{l}{2}(R_{Ay}\operatorname{sen}\theta - R_{Bx}\cos\theta) = Mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta\frac{2R^2/5}{l^2/4 + 2R^2/5} = \frac{2}{5}MR^2\ddot{\theta}
$$

donde se ha empleado también la ecuación (7) para obtener el resultado final.

[1]Llamamos triedro intermedio al que sigue el movimiento del sólido salvo en su rotación propia $\dot{\varphi}$; es decir, este triedro posee una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{v} = \dot{\theta}\boldsymbol{k}$.