Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (29 de Mayo de 1995)

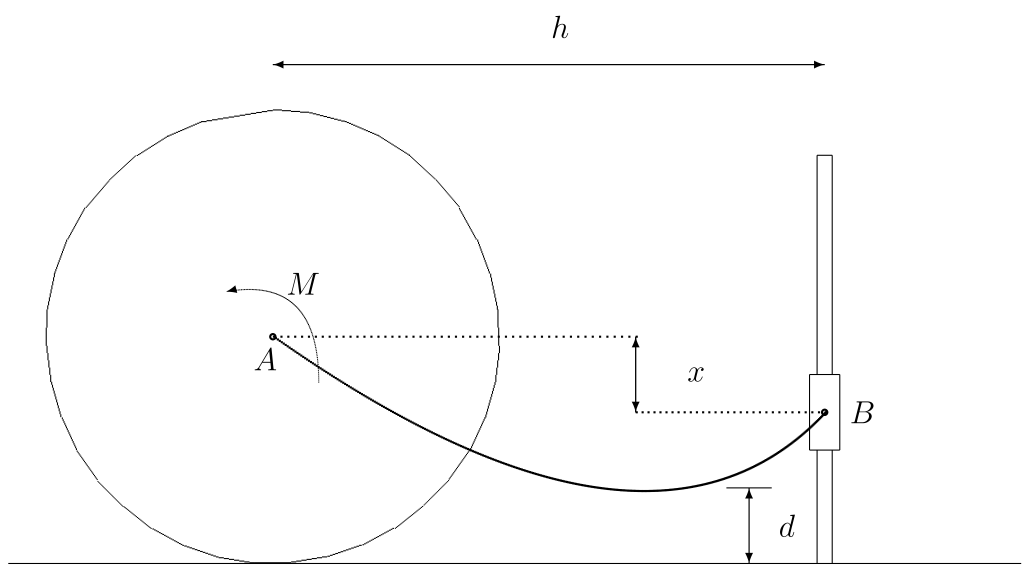
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 45 min.

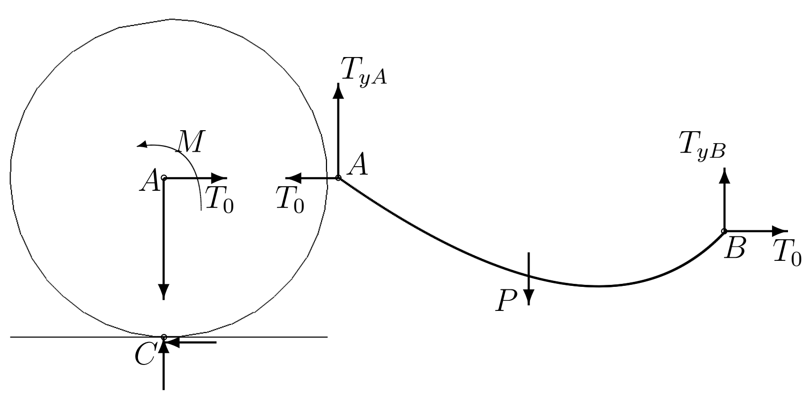
El sistema plano de la figura está formado por un disco de radio R, que rueda sin deslizar en todo momento sobre una recta horizontal. El disco lleva articulado en su centro A un cable de peso total P y longitud L. El otro extremo del cable, B, está obligado a moverse según una guía vertical rugosa, mediante una deslizadera sin peso. Sobre el disco actúa un par constante de valor $M = P\,R/2$.

Si el coeficiente de rozamiento entre la deslizadera y la guía vertical vale 0,5, admitiendo que el cable no llega a tocar a la recta horizontal, se pide calcular en la posición de equilibrio estricto:

1. Tensiones en los extremos del hilo.
2. Valores de x, h y d (ver figura).
3. Longitud máxima del hilo para que no llegue a tocar la recta horizontal.



1.- Consideramos en primer lugar el equilibrio en forma aislada del disco y del conjunto del cable. Sobre el disco además del momento aplicado M actúa la tensión del cable, de componentes (T_0, T_{yA}), su propio peso, y la reacción de la recta sobre la que rueda. Sobre el cable actúan las tensiones en A y B y su peso P.



La tensión horizontal del cable (T_0) se obtiene al imponer el equilibrio del disco, al anular el momento en el punto de contacto C:

$$T_0 R = M = \frac{PR}{2} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{P}{2}.$$

Considerando que el enlace en el apoyo B está en la situación de equilibrio estricto, la reacción vertical es:

$$T_{yB} = 0{,}5\, T_0 = 0{,}25P$$

Planteando el equilibrio de fuerzas verticales del conjunto del cable:

$$T_{yA} + T_{yB} - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{yA} = 0{,}75P$$

En resumen, las tensiones en los extremos del cable son:

$$\begin{array}{lll} T_{xA} = \dfrac{P}{2}; & T_{yA} = \dfrac{3P}{4}; & T_A = \sqrt{T_{xA}^2 + T_{yA}^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}P \\ T_{xB} = \dfrac{P}{2}; & T_{yB} = \dfrac{P}{4}; & T_B = \sqrt{T_{xB}^2 + T_{yB}^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}P \end{array}$$

2.- Entre A y B el cable forma una catenaria, de ecuación:

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

donde el parámetro vale $a = \dfrac{T_0}{P/L} = \dfrac{L}{2}$. Las expresiones de la tensión vertical en A y B,

$$T_{yA} = \frac{P}{L} a \,\mathrm{senh}\, \frac{x_A}{a} = \frac{P}{2} \mathrm{senh}\, \frac{2x_A}{L}, \quad T_{yB} = \frac{P}{L} a \,\mathrm{senh}\, \frac{x_B}{a} = \frac{P}{2} \mathrm{senh}\, \frac{2x_B}{L},$$

permiten obtener la luz h entre apoyos:

$$h = |x_A| + |x_B| = \frac{L}{2} \left(\mathrm{argsenh}\, \frac{3}{2} + \mathrm{argsenh}\, \frac{1}{2} \right) = 0{,}837988L$$

Nótese que el resultado anterior se podía haber obtenido de otra forma empleando la relación de las ordenadas de la catenaria con la tensión total, $T = (P/L) a \cosh(x/a)$. En este caso la expresión resultante habría sido $h = (L/2)(\mathrm{argcosh}(\sqrt{13}/2) + \mathrm{argcosh}(\sqrt{5}/2))$, equivalente a la anterior.

El valor de x pedido es la diferencia de cotas en los apoyos:

$$x = z_A - z_B = \frac{T_A}{P/L} - \frac{T_B}{P/L} = \frac{L}{4}(\sqrt{13} - \sqrt{5}) = 0{,}342371L.$$

Por último, la distancia d se expresa como

$$d = R - (z_A - a) = R - \frac{L}{2} \left(\frac{\sqrt{13}}{2} - 1 \right)$$

3.- Para que el cable no toque la recta:

$$d > 0 \quad \Rightarrow \qquad R > \frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{13}}{2} - 1\right) = 0{,}401388L.$$

Observación: Hagamos notar que en lo anterior se admite, tal y como se desprende de la figura, que el vértice de la catenaria se halla entre A y B. Cabría otra solución posible, si se considerara el vértice de la catenaria situado a la derecha de B, aunque esto sería contradictorio con la figura del enunciado como se ha dicho. En esta otra hipótesis la solución sería: $T_{yB} = 0{,}25P$ (sentido descendente), $T_{yA} = 1{,}25P$, $T_A = P\sqrt{29}/4$, $T_B = P\sqrt{5}/4$, $h = (L/2)(\mathrm{argsenh}(5/2) - \mathrm{argsenh}(1/2))$, $x = (L/4)(\sqrt{29} - \sqrt{5})$, y $d = R - (L/2)(\sqrt{29}/2 - 1)$.