Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

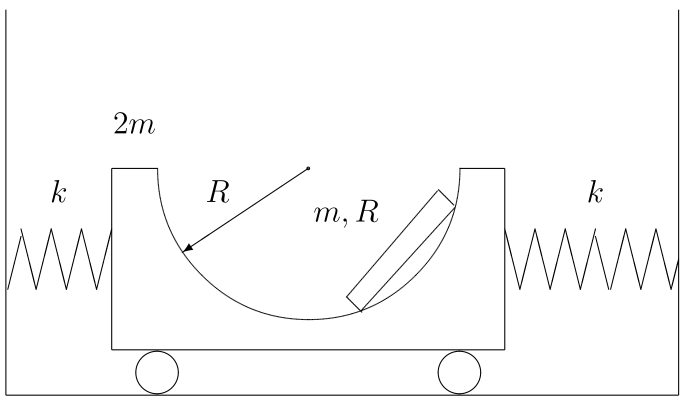
2.º EXAMEN PARCIAL (29 de Mayo de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

Un carretón de masa $2m$ se desplaza sobre una recta horizontal lisa, estando unido por dos muelles de constante k a sendos puntos fijos. El carretón tiene una alojamiento semicircular de radio R sobre el que se apoya con ligadura bilateral lisa, una varilla de longitud R y masa m. Suponiendo que en todo momento los extremos de la varilla se apoyan en el alojamiento del carretón, se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de dichas ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
3. Particularizando para $R = 1$ y $k = mg/R$, obtener las frecuencias propias y los modos de oscilación.



Tomamos las coordenadas generalizadas $(x,\, \theta)$, siendo x el desplazamiento del carretón y θ el ángulo absoluto girado por la varilla, medidos ambos a partir de la posición de equilibrio estable.

1.- El movimiento de la varilla respecto al carretón es una rotación alrededor del centro del semicírculo, de velocidad angular $\dot{\theta}$. La velocidad relativa del centro de la varilla es por tanto $R(\sqrt{3}/2)\dot{\theta}$. La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}\,(2m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{3}{4}R^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{3}R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mR^2\right)\dot{\theta}^2$$

y la energía Potencial:

$$V = 2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) - mgR\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

La función Lagrangiana es por tanto:

$$L = T - V = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{5}{12}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - kx^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mgR\cos\theta$$

Derivando, se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$3m\ddot{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}mR\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}mR\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta+2kx = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mR\ddot{x}\cos\theta+\frac{5}{6}mR^2\ddot{\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (2)$$

2.- Para linealizar las ecuaciones (1,2) consideramos pequeños (θ, x, $\dot{\theta}$, $\dot{x}$) y despreciamos los infinitésimos de segundo orden:

$$3m\ddot{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}mR\ddot{\theta}+2kx = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mR\ddot{x}+\frac{5}{6}mR^2\ddot{\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}mgR\theta = 0 \qquad (4)$$

3.- Particularizando las ecuaciones (3,4) para $k = mg/R$ y $R = 1$ y expresando el sistema linealizado en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3m & \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ \frac{\sqrt{3}}{2}m & \frac{5}{6}m \end{pmatrix}}_{\mathsf{M}} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{array} \right\} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2mg & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}mg \end{pmatrix}}_{\mathsf{K}} \left\{ \begin{array}{c} x \\ \theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Para calcular las frecuencias propias se resuelve la ecuación característica del problema de autovalores asociado:

$$|-\omega^2\mathsf{M}+\mathsf{K}| = 0$$

Operando resulta:

$$1{,}75\,\omega^4-4{,}264743g\,\omega^2+1{,}732051g^2 = 0$$

cuyas dos raíces positivas son:

$$\omega_1 = 0{,}717593\sqrt{g}; \qquad \omega_2 = 1{,}386382\sqrt{g}.$$

Los modos de oscilación son los autovectores del problema de autovalores. Tomando la primera componente de cada modo igual a la unidad, se obtiene:

Modo 1.º:

$$\underbrace{g\begin{pmatrix} 0{,}455180 & -0{,}445951 \\ -0{,}445951 & 0{,}436909 \end{pmatrix}}_{(-\omega_1^2\mathsf{M}+\mathsf{K})} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ u_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1{,}020695 \end{array} \right\}$$

Modo 2.º:

$$\underbrace{g\begin{pmatrix} -3{,}766168 & -1{,}664550 \\ -1{,}664550 & -0{,}735688 \end{pmatrix}}_{(-\omega_2^2\mathsf{M}+\mathsf{K})} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ v_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -2{,}262575 \end{array} \right\}$$