Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (29 de Mayo de 1995)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

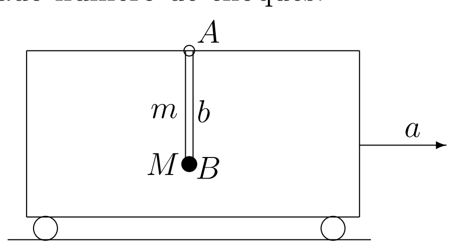
Ejercicio 5.º Tiempo: 45 min.

Un péndulo compuesto está formado por una varilla homogénea AB, de longitud b y masa m, que en su extremo B lleva una masa puntual M. El extremo A está articulado a un punto del techo de un vagón. Estando el conjunto en reposo sobre una vía horizontal, se aplica al vagón una fuerza que consigue que se desplace con una aceleración constante a. Se pide:

a. Valor máximo de a para que en el movimiento posterior del péndulo no llegue a tocar al techo del vagón.

b. Suponiendo que a tenga el valor $\sqrt{3}$ veces el calculado en el apartado anterior y que el choque de M contra el techo se produce con un coeficiente de restitución e, calcular el valor mínimo del ángulo que AB formará con la vertical:

   1. Entre el primer y segundo choque.
   2. Después de un elevado número de choques.



---

a.- Sea θ el ángulo que forma AB con la vertical descendente, tomando como positivo el sentido de las agujas del reloj. Establecemos la ecuación dinámica del movimiento de la varilla en el sistema no inercial del vagón, tomando momentos en A e incluyendo las fuerzas de inercia debidas a la aceleración de arrastre a:

$$-Mgb\,\mathrm{sen}\,\theta - mg\frac{b}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta + Mab\cos\theta + ma\frac{b}{2}\cos\theta = Mb^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}mb^2\ddot{\theta};$$

simplificando y agrupando términos,

$$\left(M + \frac{m}{3}\right)b\ddot{\theta} + \left(M + \frac{m}{2}\right)(g\,\mathrm{sen}\,\theta - a\cos\theta) = 0.$$

Definiendo el parámetro $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{arc\,sen}(a/\sqrt{g^2+a^2})$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\left(M + \frac{m}{3}\right)b\ddot{\theta} + \left(M + \frac{m}{2}\right)\sqrt{g^2+a^2}\,\mathrm{sen}(\theta - \alpha) = 0.$$

Esta ecuación caracteriza el movimiento como el de un péndulo simple de longitud equivalente $l = b\dfrac{(M+m/3)}{(M+m/2)}\dfrac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}$ cuya posición de equilibrio está inclinada un ángulo α hacia la izquierda. Cambiando de variable a $\varphi = \theta - \alpha$ la ecuación del movimiento queda finalmente

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0. \qquad (1)$$

Las condiciones iniciales que establece el enunciado son

$$\varphi(0) = \theta(0) - \alpha = -\alpha; \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \tag{2}$$

Se produce un movimiento pendular variando φ entre $-\alpha$ y $+\alpha$. Este movimiento oscilatorio no es armónico, ya que la ecuación (1) no es lineal.

La condición de que en el movimiento B llegue a tocar el techo permite calcular α:

$$\frac{\pi}{2} = \theta_{max} = \varphi_{max} + \alpha = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

lo que a su vez proporciona el valor de a necesario,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g}$$

b.- Si ahora es $a = \sqrt{3}g$, el movimiento viene definido por (1) y las condiciones iniciales (2), siendo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{\sqrt{g^2 + 3g^2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3};$$

Se producirá un impacto contra el techo cuando $\theta = \pi/2$, es decir $\varphi = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$. La velocidad de impacto se calcula mediante conservación de la energía en el péndulo equivalente, entre el instante inicial (péndulo vertical) y el del impacto:

$$\frac{g}{l}(1 - \cos\frac{\pi}{3}) = \frac{g}{l}(1 - \cos\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

Después del impacto, la velocidad es

$$\dot{\varphi}_1 = -e\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sqrt{3} - 1} \tag{3}$$

e imponiendo de nuevo conservación de la energía con el punto más bajo de la oscilación,

$$\frac{g}{l}(1 - \cos\varphi_1) = \frac{g}{l}(1 - \cos\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2$$

de donde

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}e^2(\sqrt{3} - 1)$$

El valor pedido de la inclinación mínima es por tanto

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}e^2(\sqrt{3} - 1)\right) \tag{4}$$

En el segundo choque el péndulo volverá a impactar el techo, con la velocidad (3) cambiada de signo. Después del impacto, la velocidad será

$$\dot{\varphi}_2 = -e^2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

Al repetirse el proceso para un número elevado de choques, la velocidad después del impacto tiende a

$$\lim_{n\to\infty} \dot{\varphi}_n = \lim_{n\to\infty} -e^n\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sqrt{3} - 1} = 0$$

siendo la mínima inclinación la obtenida en el límite de la ecuación (4),

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (\theta_n)_{min} = \frac{\pi}{6}}$$