Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

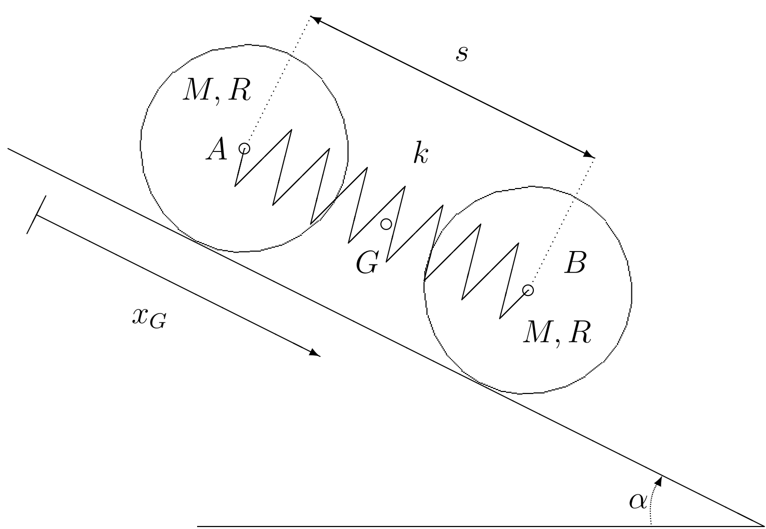
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º del Final y del 1.º Parcial Tiempo: 60 min.

El sistema de la figura está formado por dos discos iguales, de masa M y radio R, cuyos centros A y B están unidos mediante un resorte elástico de constante k. Se pide:

1. Empleando las coordenadas (x_G, s), donde x_G es el desplazamiento según la dirección inclinada del C.D.M. del conjunto y s la elongación del muelle respecto a su longitud natural, determinar las ecuaciones del movimiento del sistema y las integrales primeras. Se supondrá que en el instante inicial el conjunto parte del reposo con el muelle sin tensión.

2. Obtener la reacción de la recta sobre el disco A.



1.- Supondremos, como indica la figura, que la longitud natural del muelle es nula, además de que los discos no interfieren entre sí.

La energía cinética del disco A es

$$T_A = \frac{1}{2}m\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}_A}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}_A^2$$

Siendo x_A la distancia recorrida por A sobre el plano, $x_A = x_G - s/2$. Considerando la expresión análoga para B con $x_B = x_G + s/2$, la energía cinética del conjunto es

$$T = \frac{3}{2}m\left(\dot{x}_G^2 + \frac{\dot{s}^2}{4}\right)$$

La energía potencial, siendo α la inclinación del plano, vale

$$V = \frac{1}{2}ks^2 - 2mgx_G \operatorname{sen}\alpha.$$

resultando la Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{3}{2}m\left(\dot{x}_G^2 + \frac{\dot{s}^2}{4}\right) - \frac{1}{2}ks^2 + 2mgx_G \operatorname{sen}\alpha.$$

De aquí se deducen inmediatamente las ecuaciones de Lagrange de la dinámica:

$$3m\ddot{x}_G - 2mg\operatorname{sen}\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\frac{3}{4}m\ddot{s} + ks = 0 \tag{2}$$

Observamos que las coordenadas escogidas conducen a dos ecuaciones desacopladas, definiendo la primera la caída del conjunto por el plano inclinado con aceleración uniforme $\ddot{x}_G = (2/3)g\operatorname{sen}\alpha$, y la segunda una oscilación armónica interna entre A y B.

Para las condiciones iniciales dadas la ecuación (2) tiene la solución trivial $s = 0$, por lo que el conjunto cae rodando sin movimiento relativo y sin tensión en el muelle.

2.- Obtendremos ahora las reacciones sobre el disco superior A. La reacción normal (N) se obtiene inmediatamente de establecer el equilibrio en esta dirección,

$$\boxed{mg\cos\alpha = N}$$

Para la reacción tangencial (T) planteamos la ecuación de la cantidad de movimiento para el disco A en la dirección del plano inclinado; Considerando T positiva en sentido ascendente,

$$mg\operatorname{sen}\alpha + ks - T = m\overbrace{\left(\ddot{x}_G - \frac{\ddot{s}}{2}\right)}^{\ddot{x}_A}$$

Eliminando $\ddot{x}_G$ y $\ddot{s}$ mediante las ecuaciones (1) y (2) se obtiene finalmente

$$\boxed{T = \frac{1}{3}(mg\operatorname{sen}\alpha + ks)}$$

Particularizando para las condiciones iniciales anteriores, sería $T = (1/3)mg\operatorname{sen}\alpha$.