Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

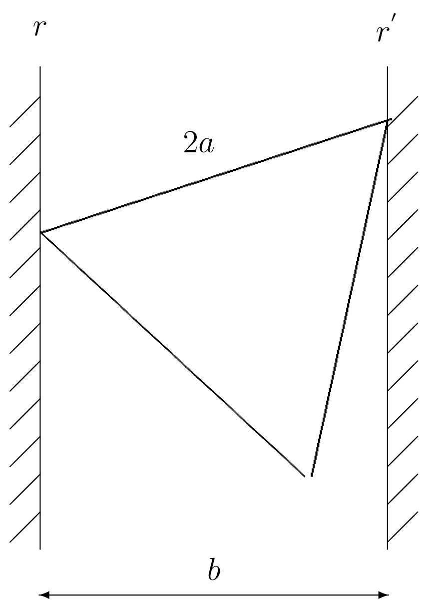
EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 6.º Final y 5.º del 2.º Parcial Tiempo: 45 min.

Una placa triangular equilátera, de lado $2a$ y peso P, se encuentra confinada en un plano vertical entre dos rectas verticales rugosas r y r' que distan entre sí una distancia b (por supuesto, se cumple siempre que $a\sqrt{3} < b < 2a$), de forma que se apoya contra ellas por sus dos vértices superiores quedando acodalada. Se pide:

1. Obtener el mínimo valor del coeficiente k de rozamiento al deslizamiento de forma que la placa permanezca en equilibrio, en función de a y de b.
2. Calcular el valor de las reacciones de r y r' en el supuesto de que el rozamiento tenga el valor mínimo arriba calculado, es decir, si la placa está en el límite de deslizamiento.
3. Demostrar que existe un valor mínimo k_0 del coeficiente de rozamiento que permite que la placa esté en equilibrio para cualquier valor de b dentro del rango especificado, y calcular k_0.



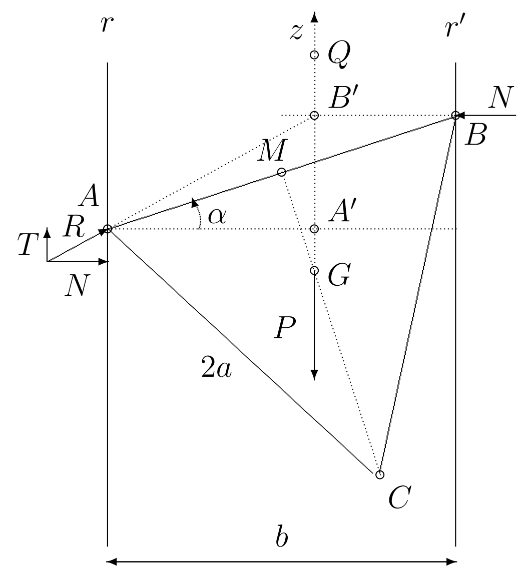
1.- La placa ABC debe quedar en equilibrio sometida a tres fuerzas: su peso P, la reacción $\boldsymbol{R}$ de la recta r sobre el vértice A, y la reacción $\boldsymbol{R}'$ de la recta r' sobre el vértice B (ver figura en la siguiente página). Según sabemos, es condición necesaria para el equilibrio que estas tres fuerzas sean concurrentes, por lo que deberán pasar por algún punto Q de la vertical Gz (recta de acción del peso P).

Ambas reacciones podrán descomponerse en:

- Una componente normal al enlace. Deberán ser iguales y opuestas, para la nulidad de fuerzas horizontales. Llamemos N a su módulo.

- Una componente tangencial. Su sentido, evidentemente, será ascendente, ya que la tendencia a deslizar provocada por el peso es descendente[1].

Es decir, la reacción $\boldsymbol{R}$ podrá pasar por algún punto de la semirrecta $A'z$, mientras que la reacción $\boldsymbol{R'}$ podrá pasar por algún punto de la semirrecta $B'z$, por lo que el punto Q deberá pertenecer a esta semirrecta $B'z$, que es la parte común a ambas zonas. Está claro que según más alto esté Q, mayores serán las inclinaciones de ambas reacciones, por lo que será mayor el rozamiento necesario. Por lo tanto, el valor mínimo de éste corresponderá al punto más bajo posible, que es el B', con lo que no es necesario rozamiento en r' (siendo, por tanto, $T' = 0$), pero en r hace falta un rozamiento de coeficiente $k = A'B'/AA'$.



$$A'B' = 2a \operatorname{sen} \alpha$$

$$AA' = AM \cos \alpha + MG \operatorname{sen} \alpha = a \cos \alpha + \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} \alpha$$

siendo $\cos \alpha = b/2a$, con lo que en definitiva:

$$\boxed{k = \frac{2\sqrt{(4a^2 - b^2)}}{b + \sqrt{(4a^2 - b^2)}/\sqrt{3}}} \tag{1}$$

2.- Llamando T a la componente tangencial de R, es inmediato ($\Sigma F_z = 0$) que $T = P$. Al estar en el límite de deslizamiento, $N = P/k$.

3.- Sin necesidad de proceder a cálculos analíticos, puede apreciarse que la posición más desfavorable que exige el máximo necesario de k se corresponde con el máximo de α (que origina simultáneamente el máximo de $A'B'$ y el mínimo de AA'), es decir, con el mínimo de b. En el límite éste vale $b_{min} = a\sqrt{3}$ (debiendo ser en la práctica algo mayor, $b = a\sqrt{3} + \epsilon$, para que el triángulo quepa entre r y r'), con lo que

$$\boxed{k_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Como comentario final, digamos que si el valor del rozamiento es suficiente, el equilibrio se presenta automáticamente, circunstancia que caracteriza el fenómeno del acodalamiento.

[1]Durante el examen pudimos observar que algunos alumnos orientaban la componente tangencial en B hacia abajo. Esto significaría que mientras el vértice A tiende a descender, el vértice B tiende a subir, lo cual no sólo resulta sorprendente, sino que implicaría que el lado AB "quiere" alargarse.

Es decir, la condición necesaria de concurrencia de las fuerzas que señalábamos al principio, será también suficiente.

Es interesante también discutir el equilibrio cuando el rozamiento sea mayor que el estrictamente necesario, calculado en (1). En este caso el triángulo no estará en el límite de deslizamiento en ninguna de las dos rectas, sabiéndose únicamente que las reacciones tangenciales cumplen $T \leq \mu N$ y $T' \leq \mu N$.

Graficamente, diríamos que las reacciones $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R}'$ se cortan en un punto de la semirrecta $B'z$ con la única restricción de que sus ángulos con la normal no superen al de rozamiento. En esta situación, el valor de las reacciones queda indeterminado: no existe un único valor de éstas que satisfaga las condiciones de equilibrio como sólido rígido.

Esta paradoja se resuelve en la práctica (en cuyo caso existirá un valor dado y por tanto único de las reacciones) porque entran en juego otras condiciones como la deformabilidad elástica de la placa y de los puntos de apoyo. El cálculo detallado de estos aspectos complicaría considerablemente el problema.