

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 2.º (sólo 1.º Parcial)

Tiempo: 45 min.

El radio de la órbita de Venus es 0,72 veces el de la Tierra (se suponen ambas órbitas circulares y coplanarias). Una nave espacial viaja de la Tierra a Venus siguiendo una órbita elíptica que es tangente a cada una de las órbitas planetarias y es la órbita de viaje más económica (órbita de transferencia). Se pide:

1. Hallar la velocidad relativa de la nave respecto a la Tierra justo después del lanzamiento, y respecto a Venus justo después de llegar a su órbita, despreciando en cada caso la atracción gravitatoria del planeta. (Velocidad orbital terrestre = 30 Km/s).
2. Hallar el tiempo necesario para realizar el viaje en las condiciones anteriores.
3. ¿En que parte de su órbita respecto a la tierra debe estar Venus en el momento del lanzamiento para asegurar que estará en el sitio correcto cuando llegue la nave?.

1.- Al suponer que las órbitas de Venus y la Tierra son circulares, las velocidades respectivas son

$$v_v^2 = \frac{GM_{sol}}{R_v}; \quad v_t^2 = \frac{GM_{sol}}{R_t}$$

dividiendo ambas expresiones y empleando el dato $R_v/R_t = 0,72$ resulta

$$v_v^2 = v_t^2 \frac{R_t}{R_v} \Rightarrow v_v = 35,35 \text{ km/s}$$

La órbita de transferencia es una elipse con semieje mayor

$$a = \frac{1}{2}(R_t + R_v);$$

en el instante 1 en que parte de la órbita terrestre la velocidad de la nave es

$$v_1^2 = GM_{sol} \left(\frac{2}{R_t} - \frac{1}{a} \right) = GM_{sol} \frac{2R_v}{R_t(R_t + R_v)} = v_t^2 \frac{2R_v}{R_t + R_v}$$

por lo que la diferencia de velocidad con la tierra es

$$v_1 - v_t = v_t \left(\sqrt{\frac{2R_v}{R_t + R_v}} - 1 \right) = -2,55 \text{ km/s}$$

es decir la nave debe ralentizarse respecto de la velocidad de la órbita terrestre.

Por otra parte, en el instante 2 en que llega a la órbita de Venus

$$v_2^2 = GM_{sol} \left(\frac{2}{R_v} - \frac{1}{a} \right) = GM_{sol} \frac{2R_t}{R_v(R_t + R_v)} = v_v^2 \frac{2R_t}{R_t + R_v}$$

por lo que

$$v_2 - v_v = v_v \left(\sqrt{\frac{2R_t}{R_t + R_v}} - 1 \right) = 2,7689 \text{ km/s}$$

2.- El periodo orbital de la nave es

$$T_n^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{sol}}$$

Por otra parte, conocemos el valor del de la Tierra que es un año sidéreo (365,25 días):

$$T_t^2 = \frac{4\pi^2 R_t^3}{GM_{sol}}$$

entre ambas ecuaciones podemos calcular el tiempo pedido que es la mitad del periodo orbital de la nave:

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}T_t \left(\frac{a}{R_t} \right)^{3/2} = 0,3988 \text{ años} = 145,65 \text{ días}$$

3.- Basta con calcular el ángulo recorrido por Venus en su órbita circular durante el tiempo calculado arriba. El periodo orbital de Venus es

$$T_v^2 = \frac{4\pi^2 R_v^2}{GM_{sol}}$$

por lo que el ángulo recorrido es

$$\phi = 2\pi \frac{1}{2} \frac{T_n}{T_v} = \pi \left(\frac{a}{R_t R_v} \right)^{3/2} = 4,1011 \text{ rad} = 234,975^\circ$$